

Capítulo II

CINEMÁTICA

1. A posição

Cinemática é, por definição, o estudo do movimento dos corpos, e o movimento observa-se por uma mudança de posição. Vamos começar por isso este capítulo, definindo em concreto o que se entende por posição em Física. Neste capítulo e no próximo, estaremos a tratar de corpos que, pelas suas dimensões se podem reduzir a um ponto. Esta aproximação, que é válida em muitas circunstâncias, designa-se por aproximação do **ponto material**. A cinemática de um corpo cujas dimensões não podem ser desprezadas será abordada no capítulo V dedicado ao estudo do corpo rígido.

Um geólogo quando se dirige ao campo para fazer observações encontra-se habitualmente munido de um mapa à escala de 1:25 000 disponibilizado pelos serviços cartográficos do exército (figura 1). Neste mapa, usando as coordenadas quilométricas no bordo da carta, a posição horizontal do geólogo, considerado como um ponto material, fica definido por duas coordenadas a que se designam x e y . No exemplo da figura $x=540\ 000\ m$ e $y=4419\ 000\ m$. Além disso o geólogo pode saber a sua altitude seguindo e interpolando as linhas de nível. A altitude constitui a coordenada z ($z=450\ m$ no exemplo). Vemos assim que um ponto no espaço fica completamente definido conhecendo 3 coordenadas, (x,y,z) .

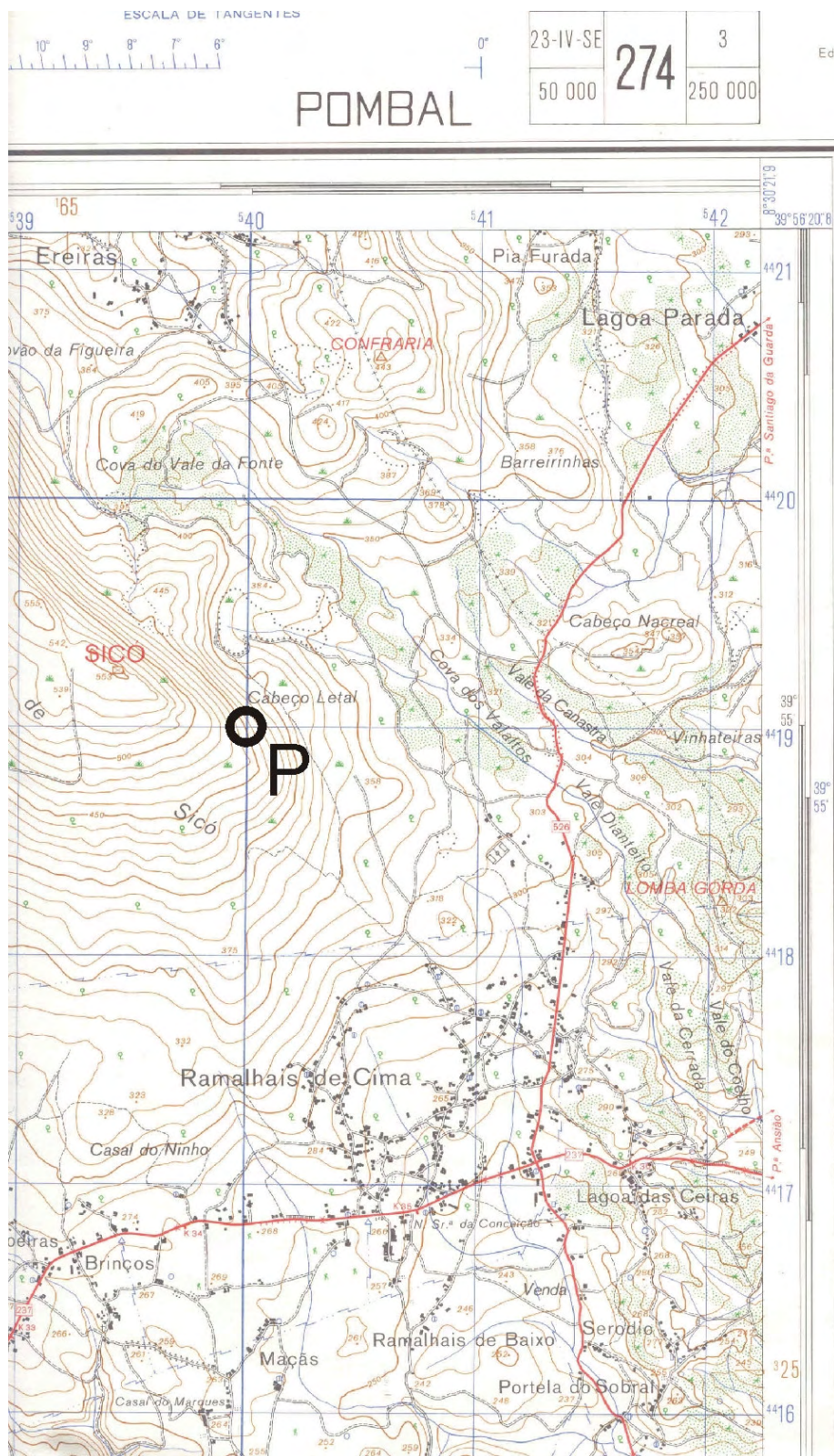


Figura 1 – Parte do mapa nº 274 dos Serviços Cartográficos do Exército. Edição original à escala de 1:25 000. A identificação do ponto P no mapa requer a definição de 3 coordenadas, x , y e z , sendo a coordenada z a altitude do ponto.

Tal como em Geologia, também na Física a definição da posição de um ponto no espaço requer a definição de 3 coordenadas. Estas são definidas num **referencial**. Habitualmente o referencial utilizado é um **referencial cartesiano** (Figura 2) onde os 3 eixos são mutuamente perpendiculares, orientados no sentido directo. Neste referencial a posição de um ponto qualquer é definida pelo **vector posição** \vec{r} e pelas suas coordenadas em termos dos vectores unitários da base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$,

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

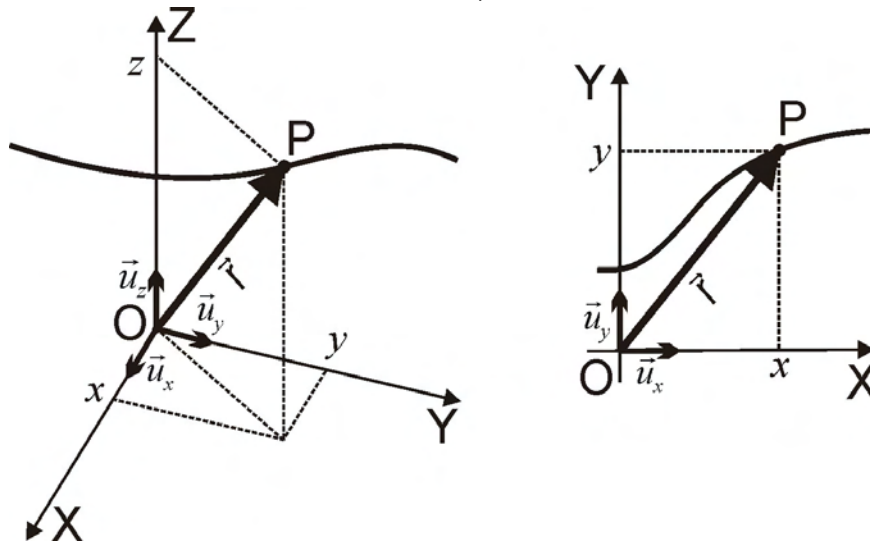


Figura 2 – Coordenadas cartesianas no espaço e no plano

A **unidade** de posição no Sistema Internacional de unidades (sistema SI) é o **metro (m)**. Esta é a nomenclatura adoptada nestes apontamentos, mas noutras referências poder-se-á encontrar para os vectores unitários da base, ou **versores**, a designação $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ou $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A posição de um ponto também pode ser representada de forma abreviada pelo terno ordenado (x, y, z) , as **coordenadas cartesianas**. No plano, apenas duas coordenadas são necessárias, $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$, e a posição define-se pelo par ordenado (x, y) .

A superfície da Terra, quando as dimensões são pequenas quando comparadas com o raio do Globo (alguns *km*) a geometria é aproximadamente cartesiana e o sistema de eixos (X, Y, Z) funciona satisfatoriamente. Ele constitui um **sistema local de coordenadas**.

No entanto, muitas vezes o trabalho do geólogo leva-o a fazer grandes deslocamentos na superfície do Globo. Nesse caso, as coordenadas naturais para representar a posição de um ponto não são as coordenadas cartesianas, mas sim as **coordenadas geográficas**, latitude e longitude, às quais juntamos a altitude. Importa por isso saber que relação existe entre estas coordenadas e as cartesianas.

Para o compreender melhor, começamos pelo plano (figura 3b) e pela marcação da posição de um ponto que se pode deslocar numa trajectória circular ao longo de uma circunferência de raio *R*. A posição do ponto tanto pode ser definida pelas suas coordenadas cartesianas (x, y) como pelo ângulo θ que o vector posição faz com a

horizontal e pela distância R ao centro da projecção. Ao par de coordenadas definidas desta forma (R, θ) designamos de **coordenadas polares** do ponto P.

Usando a definição das funções trigonométricas é fácil de perceber como se obtêm as coordenadas cartesianas a partir das coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

Usando o Teorema de Pitágoras e a definição da função tangente obtemos as relações inversas, que transformam coordenadas cartesianas em coordenadas polares,

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} y/x \end{cases}$$

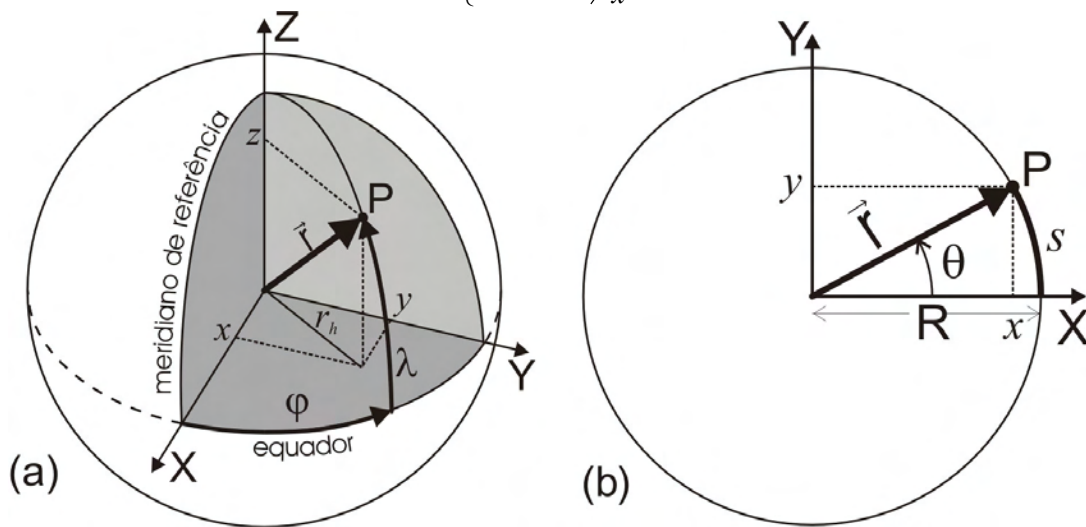


Figura 3 – Coordenadas polares no plano e coordenadas esféricas no espaço

De salientar, usando ainda a figura 3b, a relação que existe na circunferência entre o comprimento do arco de circunferência, s , e o ângulo θ (em radianos),

$$s = R\theta$$

No caso da superfície da Terra e das coordenadas geográficas, a situação complica-se um pouco pois o Globo não é uma esfera perfeita. De facto, a forma geométrica mais próxima é um elipsóide de revolução, com o eixo menor alinhado com o eixo de rotação da Terra. As coordenadas geográficas definem-se sobre este elipsóide e por isso o seu tratamento é bastante complexo. Basta recordar que a vertical de cada lugar, usada para definir a latitude de um ponto, não passa pelo centro da Terra. No entanto, em muitas aplicações, em particular na **Cinemática das Placas Tectónicas**, a discutir mais à frente, o Globo pode ser considerado uma esfera, desde que as coordenadas sejam **geocêntricas**¹ e não geográficas. Esta será a aproximação que

¹ A longitude geocêntrica é idêntica à longitude geográfica e não precisa de transformação. Quanto à latitude, ela pode ser transformada aproximadamente pelas relações

$$\begin{aligned} \lambda_{geocentrica} &= \tan^{-1}[0.9933 \cdot \tan(\lambda)] \\ \lambda &= \tan^{-1}[\tan(\lambda_{geocentrica})/0.9933] \end{aligned}$$

será considerada sempre que falarmos em latitude e longitude, a não ser que o contrário seja mencionado explicitamente.

Na esfera de raio R (figura 3a) a posição do ponto pode ser expressa pelas suas coordenadas cartesianas (x, y, z) ou então pela sua latitude (λ) e longitude (φ). Os 3 elementos (R, λ, φ) designam-se por **coordenadas esféricas** do ponto **P**. Para deduzir a relação entre os dois conjuntos de coordenadas, há que projectar em 1º lugar o vector posição \vec{r} no plano horizontal XY, obtendo-se o vector de módulo

$$r_h = R \cos \lambda$$

A projecção de \vec{r} no eixo vertical ZZ permite obter imediatamente a coordenada cartesiana z

$$z = R \sin \lambda$$

Por fim, a projecção de r_h segundo os eixos XX e YY permite obter (figura 3a)

$$\begin{cases} x = R \cos \lambda \cos \varphi \\ y = R \cos \lambda \sin \varphi \\ z = R \sin \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda = \sin^{-1} \frac{z}{R} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

que traduzem a transformação de coordenadas cartesianas em esféricas e *vice-versa*. Não esquecer nas aplicações que a latitude varia de -90° a $+90^\circ$, sendo a latitude Norte positiva, e que a longitude varia de -180° a $+180^\circ$, sendo a longitude Este positiva.

2. A trajectória

O movimento de um corpo significa que a sua posição varia com o tempo, isto é, que o vector posição é uma função do tempo, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. A esta equação designamos por **equação do movimento**.

Exemplo 1: Equação de movimento no plano $\vec{r}(t) = 2t\vec{u}_x + (10 - 10t^2)\vec{u}_y, m$

Ao conjunto de todos os pontos que são ocupados por um corpo durante o seu movimento designamos por **trajectória**. A trajectória pode ser definida no plano por uma equação algébrica em (x, y) que se obtém eliminando o tempo das equações do movimento. No espaço a 3 dimensões a equação algébrica deve envolver as 3 coordenadas (x, y, z) .

Exemplo 2: Equação anterior, traduzida em 2 equações escalares

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 10 - 10t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = x/2 \\ y = 10 - 2.5x^2 \end{cases}$$

Eliminando o tempo por substituição, obtemos a equação de uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

Exemplo 3: Equação do movimento dada por $\vec{r}(t) = 5\text{sen}10t\vec{u}_x + 5\text{cos}10t\vec{u}_y$, m

As equações escalares correspondentes são

$$\begin{cases} x = 5\text{sen}10t \\ y = 5\text{cos}10t \end{cases}$$

Neste caso, para eliminar o tempo, podemos elevar ambas as equações ao quadrado e usar a identidade trigonométrica $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$. Obtemos então

$$\begin{cases} x^2 = 25\text{sen}^2 10t \\ y^2 = 25\text{cos}^2 10t \end{cases} \quad x^2 + y^2 = 25$$

A trajectória é uma circunferência centrada na origem e com raio 5 m.

Quanto à forma da trajectória que tomam os corpos, os movimentos podem ser classificados de **rectilíneos**, quando a trajectória é uma recta, ou **curvilíneos**, no caso contrário.

3. A velocidade

A mudança de posição de um corpo entre dois instantes consecutivos t_1 e t_2 é avaliada pelo **vector deslocamento**, $\Delta\vec{r}$, definido como o vector diferença entre as posições final e inicial (figura 4), $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. É um vector que tem o seu início no vector posição inicial e a extremidade no vector posição final. O deslocamento exprime-se na mesma unidade que a posição. No sistema SI essa unidade é o metro (m).

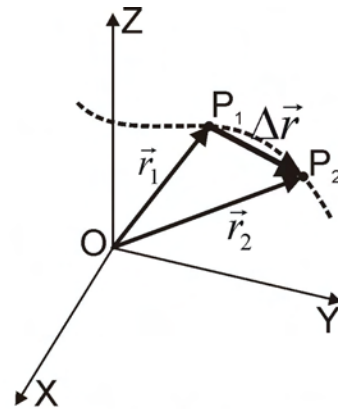


Figura 4 - O vector deslocamento

Exemplo 4: Considerando a equação do movimento dada no exemplo-1 vamos calcular o deslocamento realizado no intervalo $[0,2]$ s. No instante inicial a posição vale $\vec{r}(0) = 0 \cdot \vec{u}_x + 10\vec{u}_y$, m e no instante final a posição vale $\vec{r}(2) = 4 \cdot \vec{u}_x - 30\vec{u}_y$, m. O vector deslocamento será então $\Delta\vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(0) = 4\vec{u}_x - 40\vec{u}_y$, m

O módulo do deslocamento vale $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{4^2 + 40^2} = 40.2$ m

Velocidade é a grandeza física que mede a rapidez com que se dá a mudança de posição, a rapidez com que se faz o deslocamento. A velocidade é por isso uma **grandeza vectorial**, tem **módulo**, **direcção** e **sentido**.

Começamos por definir a **velocidade média** como a grandeza que mede a rapidez do deslocamento, $\Delta\vec{r}$, entre dois instantes distintos, Δt ,

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

No Sistema Internacional de unidades a unidade de velocidade é o **m/s** (metro por segundo). A velocidade média é um vector cuja direcção e sentido são os mesmos

do vector deslocamento (figura 4). O seu módulo é dado por $|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$

Exemplo 5: Usando os dados do exemplo-4, a velocidade média vem dada por

$$\vec{v}_m = \frac{1}{2}(4\vec{u}_x - 40\vec{u}_y) = 2\vec{u}_x - 20\vec{u}_y, \text{ m/s}$$

O seu módulo vale $|\vec{v}_m| = \sqrt{2^2 + 20^2} = 20.1 \text{ m/s}$

A **velocidade instantânea**, ou simplesmente **velocidade** \vec{v} , é a grandeza que mede em cada instante a rapidez da mudança de posição, e obtém-se a partir da velocidade média, fazendo o intervalo de tempo tender para zero, isto é,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Trata-se também de uma grandeza vectorial e por isso caracterizada por ter módulo, direcção e sentido.

Usando o conceito de derivação, vemos que pela definição, a velocidade é a derivada do vector posição em ordem ao tempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

O módulo do vector velocidade $|\vec{v}| = |d\vec{r}/dt|$ é igual ao valor indicado no “conta-quilómetros” dos veículos, isto é, ele dá-nos a rapidez com que o espaço é percorrido. Podemos recordar a equivalência de unidades entre *km/h* e *m/s*, $10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}$.

Para melhor compreender a relação entre a direcção e sentido do vector velocidade e a trajectória do movimento, devemos observar a figura 5, onde se indicam, numa trajectória curvilínea, a direcção da velocidade média para intervalos cada vez mais curtos. É assim fácil de entender que no limite, quando $\Delta t \rightarrow 0$, **o vector velocidade é tangente à trajectória** e o seu sentido é o do movimento.

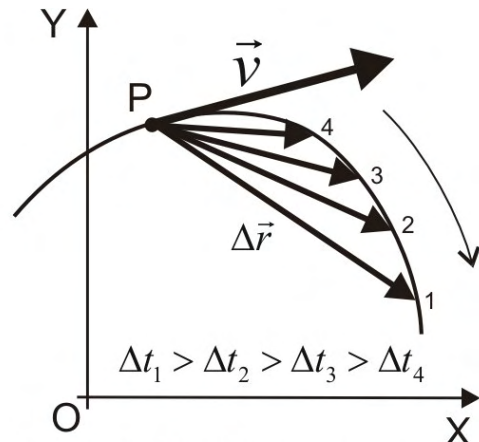


Figura 5 - A direcção do vector velocidade

Uma vez que a velocidade, sendo um vector, tem módulo, direcção e sentido, ela também poderá sofrer variação em cada uma dessas propriedades. É a propriedade que varia na velocidade que permite caracterizar os movimentos:

- Um movimento diz-se **rectilíneo**, se a velocidade não muda de direcção, e **curvilíneo** no caso contrário;
- Um movimento diz-se **uniforme** se o módulo da velocidade não varia, e **variado** no caso contrário.

O movimento mais simples que existe é por isso o **movimento rectilíneo uniforme**

(**MRU**) que iremos desenvolver num dos próximos parágrafos.

Exemplo 6: Consideremos de novo a equação de movimento no plano dada no exemplo-1: $\vec{r}(t) = 2t\vec{u}_x + (10 - 10t^2)\vec{u}_y$, m

O vector velocidade obtém-se por derivação simples: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{u}_x - 20t\vec{u}_y$, m/s

Note-se que o módulo do vector velocidade não é constante e por isso o movimento é variado: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (20t)^2} \neq cte$

Exemplo 7: Consideremos agora a equação do movimento dada no exemplo-3: $\vec{r}(t) = 5\text{sen}10t\vec{u}_x + 5\text{cos}10t\vec{u}_y$, m

Neste caso, ao efectuar a derivação do vector posição não devemos esquecer que as funções seno e cosseno são compostas. O vector velocidade toma assim a expressão: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 50\text{cos}10t\vec{u}_x - 50\text{sen}10t\vec{u}_y$, m/s

Neste caso, usando a identidade fundamental da trigonometria, é fácil concluir que o módulo do vector velocidade é constante:

$$|\vec{v}| = \sqrt{50^2 \cos^2 10t + 50^2 \text{sen}^2 10t} = 50\sqrt{\cos^2 10t + \text{sen}^2 10t} = 50 \text{ m/s}$$

Uma vez que a trajectória é circular, trata-se de um movimento particular que será objecto de estudo aprofundado mais à frente neste capítulo, o **movimento circular uniforme (MCU)**.

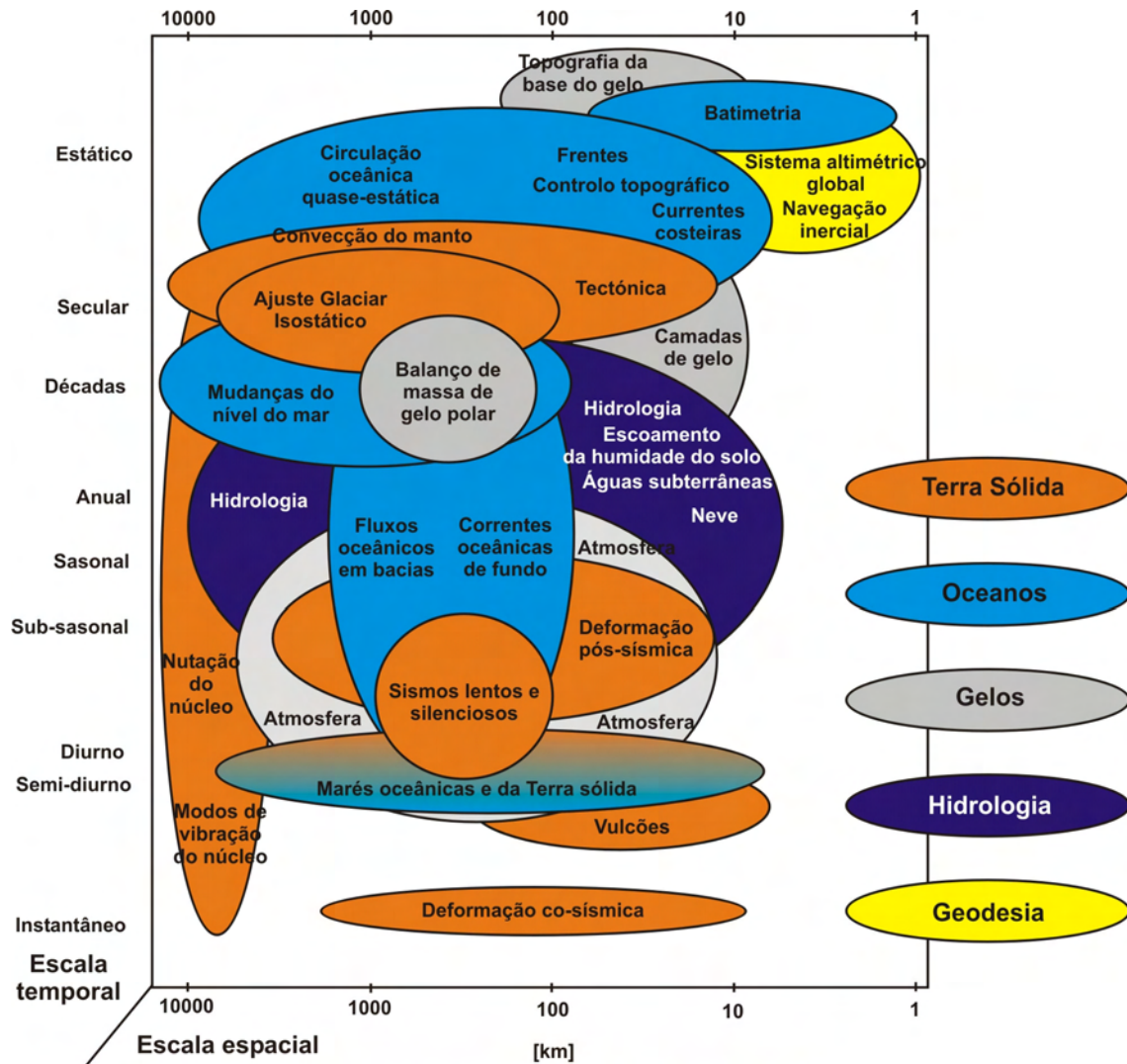
4. Os Movimentos em Geologia

Em Física, o estudo da cinemática do ponto material significa analisar as características do movimento de uma partícula, descrito em termos gerais pela evolução da sua posição com o tempo, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. O conjunto de pontos ocupados pela partícula ao longo do movimento representa a sua *trajectória* e o movimento em si pode ser classificado de *rectilíneo* ou *curvilíneo*, *uniforme* ou *variado*.

Em Geologia, os processos dinâmicos que dão e deram forma à superfície do Globo, tal como o conhecemos hoje, raramente permitem uma descrição tão simples. Uma das poucas excepções consiste na descrição da actividade explosiva em erupções vulcânicas com emissão de lava e piroclastos que descrevem trajectórias parabólicas como pontos materiais. A velocidade de expulsão destes materiais de um vulcão é da ordem de 100 m/s. Também alguns dos maiores cataclismos que afectaram a crosta terrestre no passado, tendo possivelmente levado à extinção dos dinossáurios, podem ser descritos pelo movimento de pontos materiais. É o caso do impacte de grandes asteróides com a superfície da Terra. Neste caso a velocidade pode atingir valores ultra-sónicos, $v > 340 \text{ m/s}$.

Outros processos, como a erosão, envolvem a acção prolongada de fluidos no tempo, cuja velocidade pode variar entre algumas dezenas de metros por segundo (vento $\approx 30 \text{ m/s}$) até alguns metros por hora (m/h) no caso da circulação de água num aquífero. No entanto, as formas de maior relevo que se encontram à superfície do Globo, como as cadeias montanhosas, assim como as manifestações do planeta vivo

que colocam maior risco para as populações e construções, os sismos e vulcões, resultam na sua maior parte de movimentos extremamente lentos, da ordem de centímetros por ano (*cm/ano*) ou quilómetros por milhão de anos (*km/Ma*). Estes movimentos são o resultado da Tectónica de Placas que tanto sucesso tem tido na interpretação de sistemas geológicos, tendo adquirido já um estatuto de paradigma. A placa mais rápida tem uma velocidade em relação ao manto inferior de *17 cm/ano*, o que equivale a *170 km/Ma* ($1 \text{ mm/ano} = 1 \text{ km/Ma}$).



Escala espacial e temporal dos processos geológicos e geofísicos

A figura em cima pretende fazer uma síntese das escalas espacial e temporal dos processos que afectam o planeta Terra.

5. O Movimento Rectilíneo Uniforme (MRU)

Como vimos anteriormente, um movimento em que o vector velocidade não varia em módulo, nem em direcção e sentido, designa-se por movimento rectilíneo uniforme e a sua trajectória é uma recta. Para deduzir as suas leis basta considerar esta propriedade do vector velocidade. No MRU o vector velocidade é igual à velocidade média entre dois instantes quaisquer. Tomando o instante inicial como zero, teremos

$$\Delta t = t - t_0 = t \quad e \quad \Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad com \quad t_0 = 0$$

$$\vec{v}_m = \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = cte \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{r} = \vec{v}t \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

Nesta lei, \vec{r}_0 representa a posição inicial do movimento, isto é, a posição do corpo no instante $t=0$. A lei da constância da velocidade traduz um outro princípio que está associado ao movimento rectilíneo uniforme, no MRU os corpos **realizam deslocamentos iguais em tempos iguais**

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}\Delta t$$

A lei vectorial do movimento rectilíneo e uniforme também pode ser deduzida a partir das propriedades da primitivação. Partindo da definição do vector velocidade, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, obtém-se sucessivamente, por ser \vec{v} uma constante:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \int \vec{v}dt + \vec{r}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \int dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

Para estudar o MRU no plano temos de decompor o vector velocidade segundo os dois eixos do referencial, tal como se indica na figura 6. Usando as propriedades do triângulo rectângulo podemos escrever,

$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$$

com

$$v_x = v \cos \alpha \quad e \quad v_y = v \sin \alpha$$

Usando para o vector posição a sua representação em termos das coordenadas,

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y \quad e \quad \vec{r}_0 = x_0\vec{u}_x + y_0\vec{u}_y$$

Obtemos finalmente as **equações escalares do movimento** rectilíneo e uniforme no plano:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \end{cases}$$

Quando a trajectória coincide exactamente com um dos eixos de referência, por exemplo o eixo XX, então temos apenas uma equação escalar para o MRU,

$$x = x_0 + vt$$

Nesta equação a grandeza v , numericamente igual ao valor do “conta-quilómetros”, designa-se por **velocidade escalar**. A velocidade escalar pode ser positiva ou negativa, consoante o sentido do movimento se faz no sentido positivo ou negativo do eixo.

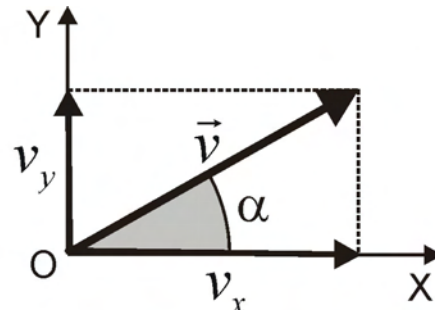


Figura 6 - Decomposição do vector velocidade no plano

Exemplo 8: Movimento rectilíneo uniforme com dois corpos em movimento.

Consideremos uma linha de ferro ideal formada por 400 km em linha recta. Da estação A, à esquerda, sai um comboio que se desloca com uma velocidade uniforme de 100 km/h, dirigindo-se para B. Da estação B, à direita, sai outro comboio, dirigindo-se para A com uma velocidade constante de 80 km/h.

a) Se os comboios partirem no mesmo instante, em que ponto da linha se encontram?

Começamos por escolher um referencial no qual vamos identificar a posição de cada comboio. Neste caso escolho um referencial XX com a origem na estação A e com sentido para B.

Neste referencial, cada um dos comboios tem um movimento rectilíneo uniforme descrito pelas equações:

$$x_A = 100t \quad e \quad x_B = 400 - 80t$$

Os comboios encontram-se quando $x_A = x_B$, isto é, $100t = 400 - 80t$

A resolução desta equação permite calcular o tempo que os comboios levam a encontrar-se, $t = 2.22 h$, e com este tempo calcula-se a distância à estação A em que os comboios se encontram, $x_A = 222 km$.

b) Se o comboio A partir uma hora depois, em que ponto da linha se encontram?

Neste caso torna-se necessário alterar a equação do movimento do comboio A. Se ele parte uma hora depois, isso quer dizer que ao fim de 1 hora ($t=1$), o comboio ainda está na estação ($x_A=0$). A equação deste comboio passa a ser $x_A = 100(t-1)$.

Usando o mesmo procedimento que anteriormente, obtém-se $t = 2.78 h$ e $x_A = 178 km$.

c) Com que atraso deve partir o comboio A de modo que os comboios se encontrem exactamente a meio da linha?

Agora o atraso não é conhecido e é uma incógnita do problema, t_0 . A equação do movimento do comboio A passa a ser $x_A = 100(t-t_0)$. Como os comboios se encontram exactamente a meio, obtém-se t_0 igualando na equação anterior

$$x_A = 200 = 100(t-t_0) \Rightarrow t_0 = 0.5 h$$

5. O Movimento Curvilíneo, a Velocidade Escalar

Quando se conhece a trajectória de um movimento, podemos definir a posição de um corpo de uma forma diferente do vector posição, apresentado anteriormente. Na trajectória, a posição de um corpo fica completamente definida pela **abscissa sobre a trajectória**, s , como se indica na figura 7.

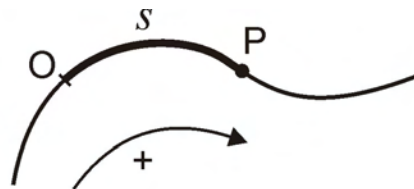


Figura 7 - Definição da abscissa sobre a trajectória

Para definir a abscissa precisamos primeiro de marcar uma origem, O, e definir um sentido como positivo. A abscissa é então a distância do ponto à origem, medida sobre a trajectória, positiva ou negativa conforme estiver à direita ou à esquerda da origem (figura 7). A abscissa é uma distância com sinal.

Se há movimento então a posição do corpo varia e podemos definir a **velocidade escalar média** como a grandeza que mede a rapidez dessa variação,

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Se não houver inversão no sentido do movimento, o módulo da velocidade escalar média iguala o “espaço percorrido” a dividir pelo “tempo gasto”. O módulo da velocidade escalar média traduz, neste caso, o conceito habitual de “*velocidade média*”.

A rapidez instantânea com que a posição varia é medida pela **velocidade escalar instantânea**, que se deriva a partir da velocidade escalar média, fazendo o intervalo de tempo tender para zero, $\Delta t \rightarrow 0$,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

O módulo da velocidade escalar é igual ao valor indicado no “conta-quilómetros”, mas ao contrário do vector velocidade, a velocidade escalar não contém nenhuma informação relativamente à direcção do movimento, é um escalar. O sentido do movimento na trajectória é dado pelo sinal da velocidade escalar. Temos então as seguintes relações

$$|v_m| \geq |\vec{v}_m| \quad e \quad |v| = |\vec{v}|$$

onde a igualdade à esquerda se verifica apenas no movimento rectilíneo (ou quando no movimento o corpo volta ao ponto de partida).

O **movimento curvilíneo uniforme**, é um movimento que se processa com a velocidade escalar constante. Fazendo $t_0 = 0$ na definição de velocidade escalar média e sabendo que no movimento uniforme a velocidade e a velocidade média são idênticas, podemos deduzir as leis deste movimento

$$\begin{aligned} \Delta t = t \quad \Delta s = s - s_0 \quad \rightarrow \quad v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t} \quad \rightarrow \\ v = cte \quad e \quad s = s_0 + vt \end{aligned}$$

6. O Movimento Circular Uniforme (MCU)

Quando se põe um disco a rodar com uma rotação constante, podemos constatar que cada partícula descreve uma trajectória circular, com uma velocidade que é constante em módulo, é o movimento circular uniforme. No entanto, como se pode ver pela figura 8, corpos colocados em pontos diferentes do disco têm velocidades diferentes. Na figura podemos ver como o ponto que descreve a trajectória de raio R_2 descreve no mesmo intervalo de tempo um arco maior, s_2 , do que um ponto colocado mais próximo do centro, como o que descreve a trajectória de raio R_1 .

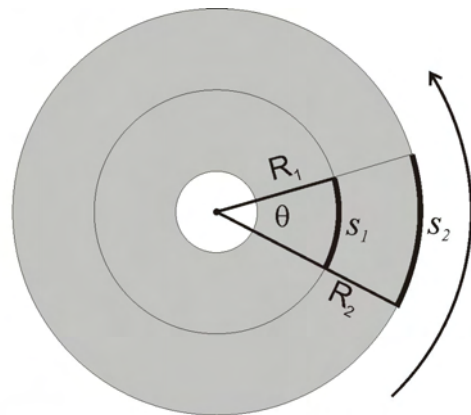


Figura 8 - Disco em movimento circular uniforme

Esta situação ocorre apesar de no mesmo intervalo de tempo ambos os corpos terem descrito o mesmo ângulo.

Por comparação com o movimento rectilíneo e uniforme, podemos dizer que no movimento circular uniforme, os corpos descrevem “**ângulos iguais em tempos iguais**”. Dito de outra forma, a variável natural para descrever o MCU não é a abcissa sobre a trajectória, mas o ângulo descrito pelos corpos no seu movimento.

Em Geologia, como iremos ver já a seguir, o MCU tem uma grande importância e por isso fazemos aqui o seu estudo com mais detalhe.

A figura 9 ilustra o movimento de uma partícula P descrevendo um movimento circular uniforme. A representação é feita em perspectiva e por isso no plano do movimento, assinalada a cinzento, a trajectória que deveria ser uma circunferência de raio r está deformada numa elipse. Conhecida a trajectória, a posição da partícula pode ser definida de forma única pelo vector posição \vec{r} , pelo arco $s(t)$ medido sobre a circunferência a partir da origem O, ou também pelo ângulo $\theta(t)$ que o vector posição faz com a linha de referência \overline{EO} . A relação entre s e θ é dada simplesmente por (com θ em radianos)

$$s(t) = r \theta(t)$$

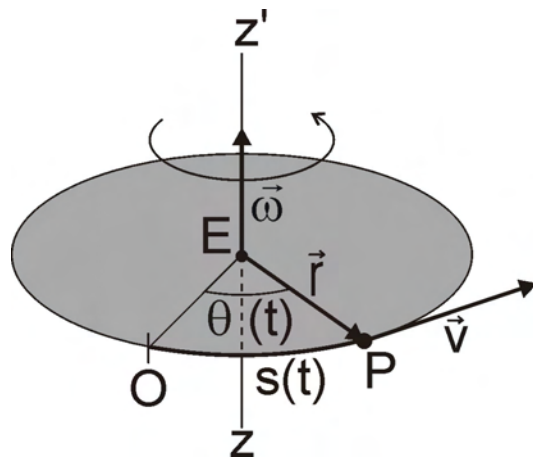


Figura 9 - Identificação das grandezas usadas na descrição do movimento circular de uma partícula P.

No movimento rectilíneo uniforme a variável natural para descrever esse movimento é o vector posição $\vec{r}(t)$ ou o arco sobre a trajectória $s(t)$. A rapidez do movimento é descrita pela velocidade \vec{v} e velocidade escalar v dadas por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

A velocidade escalar v é constante e o vector velocidade \vec{v} é constante em módulo.

No movimento de rotação os arcos descritos por diferentes pontos são diferentes mas os ângulos são os mesmos e por isso a variável natural para descrever esse movimento é o ângulo $\theta(t)$. A rapidez do movimento passa a ser caracterizada pela **velocidade angular escalar** ω

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

grandeza que mede o ângulo descrito na unidade de tempo e que é constante no movimento circular uniforme. No Sistema Internacional de unidades a velocidade angular exprime-se em *rad/s* (radianos por segundo).

A relação entre a velocidade angular e a velocidade escalar obtém-se derivando a relação entre o arco e o ângulo numa circunferência:

$$s = r\theta \quad v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = r \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = \omega r$$

O vector velocidade \vec{v} é sempre tangente à trajectória, e por isso, embora seja constante em módulo para uma partícula P (como na figura 9), a sua direcção varia de ponto para ponto e por isso \vec{v} não é constante (ver figura 9). Uma vez que a velocidade angular escalar é constante para todos os pontos de uma placa ou sólido em rotação, podemos definir o vector velocidade angular $\vec{\omega}$ de tal forma que seja constante no movimento circular uniforme, tal como o vector velocidade \vec{v} era constante no movimento rectilíneo uniforme.

A definição do vector $\vec{\omega}$ envolve o conhecimento do seu módulo, direcção e sentido. Quanto ao módulo ele é dado pelo módulo da velocidade angular escalar

$$|\vec{\omega}| = |\omega| = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

O movimento de uma partícula com movimento circular uniforme desenrola-se num plano e por isso a direcção de $\vec{\omega}$ é definida como a direcção perpendicular ao plano do movimento. Esta direcção é identificada como $\overline{ZZ'}$ na figura 9. O sentido é dado pela regra do "saca-rolhas" ou da "chave-de-fendas". Isto é, deve-se imaginar um saca-rolhas ou uma chave-de-fendas a rodar da mesma forma que no movimento circular uniforme. O sentido é dado pelo movimento ao longo do eixo daí resultante, "para cima" ou "para baixo". A aplicação desta regra permite definir o vector $\vec{\omega}$ adequado ao movimento representado na figura 9.

Os vectores $\vec{\omega}$, \vec{v} e \vec{r} são 3 vectores mutuamente perpendiculares e a sua relação é dada através do produto externo

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Usando as propriedades do produto externo, o sentido do vector velocidade pode ser obtido pela "regra da mão direita" como se ilustra na figura 10. Os dedos da mão direita devem reproduzir a rotação do 1º vector ($\vec{\omega}$) para o 2º vector do produto externo (\vec{r}). Nestas circunstâncias o polegar dará o sentido do vector velocidade, como se indica na figura 10.

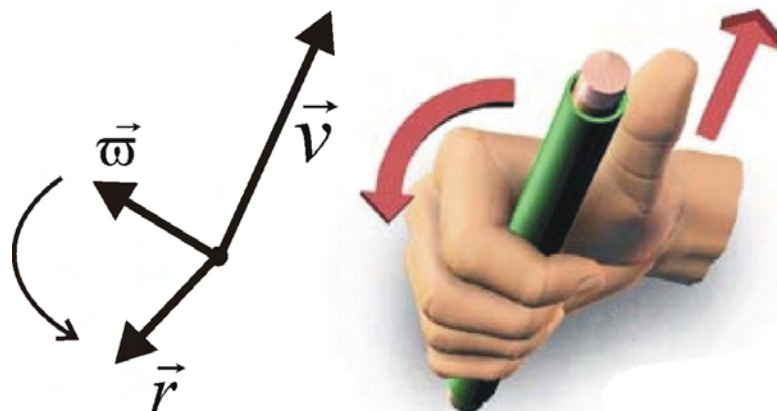
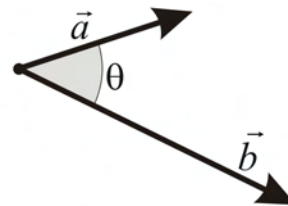


Figura 10 - A regra da "mão direita" para o produto externo

CAIXA 1 – O Produto Externo entre vectores

O produto vectorial ou produto externo, $\vec{a} \times \vec{b}$, é uma operação entre dois vectores, cujo resultado é também um vector. Por isso a sua definição exige o conhecimento do módulo, direcção e sentido. Para ilustrar o conceito de produto externo, considerem-se os dois vectores no plano da folha, \vec{a} e \vec{b} , ilustrados na figura, com uma origem comum e fazendo um ângulo θ entre si. **O módulo** do produto externo vale por definição

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{sen } \theta$$



Por esta expressão se vê que o produto externo é nulo quando os 2 vectores forem paralelos. **A direcção** do produto externo é perpendicular ao plano que contém os 2 vectores, neste caso, a direcção é perpendicular ao plano do papel. **O sentido** do produto externo é dado pela regra do saca-rolhas ou regra da mão direita, fazendo rodar o primeiro vector para o segundo vector, isto é, de \vec{a} para \vec{b} . Assim o vector produto externo $\vec{a} \times \vec{b}$ é um vector perpendicular ao papel, apontando para dentro. A representação de vectores perpendiculares é feita usando os 2 esquemas mostrados também na figura. Podemos ver por esta definição que a operação produto externo não é uma operação comutativa, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$



Na prática, quando os vectores \vec{a} e \vec{b} se exprimem pelas suas coordenadas cartesianas, $\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$ e $\vec{b} = b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z$ então o produto externo calcula-se fazendo o cálculo do determinante de uma matriz construída de forma particular, contendo na 1ª linha os 3 vectores da base, na 2ª linha as componentes do 1º vector e na 3ª linha as componentes do 2º vector,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{u}_x (a_y b_z - a_z b_y) - \hat{u}_y (a_x b_z - a_z b_x) + \hat{u}_z (a_x b_y - a_y b_x)$$

O movimento circular uniforme é um movimento periódico, isto é, um movimento que repete as suas características a intervalos regulares de tempo. Para estes movimentos é conveniente definir duas grandezas que caracterizam essa periodicidade, são elas o período T , o tempo que a partícula demora a descrever uma circunferência completa, e a frequência f , o número de ciclos descritos na unidade de tempo. No Sistema Internacional de unidades SI, a frequência f vem expressa no inverso do tempo s^{-1} ou Hz . A relação entre estas grandezas e a velocidade angular escalar ω no movimento circular uniforme é dada pelas expressões

$$f = \frac{1}{T} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Exemplo-9 O movimento de rotação do Globo.

O Globo tem um movimento de rotação sobre si próprio com um período de 23 horas e 56 minutos, ou de aproximadamente 24 horas. Qual é a velocidade escalar

de um objecto situado aproximadamente à latitude de Lisboa (39°N)?

Começamos por determinar a velocidade angular do movimento. Sabendo que o período vale aproximadamente 24 horas ou 86400 s, então

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

À latitude de Lisboa, os corpos têm um movimento circular uniforme com um raio menor que o raio da Terra, de aproximadamente 6400 km. Usando a construção da figura 11, é possível calcular esse raio como $R(L) = R_T \cos \lambda = 6400 \cos 39^\circ = 4974 \text{ km}$

A velocidade escalar vem então dada por

$$v = \omega r = 0.362 \text{ km/s} = 362 \text{ m/s} \approx 1300 \text{ km/h}$$

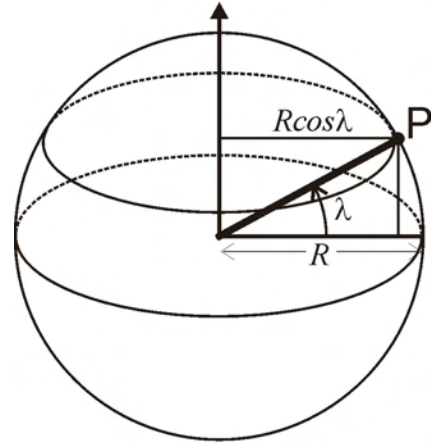


Figura 11 - MCU à latitude de Lisboa

7. A Cinemática de Placas

A Tectónica de Placas é o paradigma unificador das Ciências da Terra. Ele permite enquadrar num modelo simples os principais processos que condicionam actualmente e no passado a superfície do Globo terrestre. A tectónica de placas permite explicar porquê e onde ocorrem a maior parte dos sismos e vulcões observados à superfície do planeta. Por exemplo, na figura 12A apresenta-se o enquadramento geodinâmico de Portugal Continental e do Arquipélago dos Açores resultante da interacção entre as placas Eurasiática, Africana e Norte-Americana. A sudoeste de Portugal Continental tem-se a colisão entre as placas Eurasiática e Africana, com uma velocidade de aproximadamente 4 mm/ano, o que explica a actividade sísmica aí observada, sendo o terramoto de 1 de Novembro de 1755 o evento mais notável que aí teve origem.

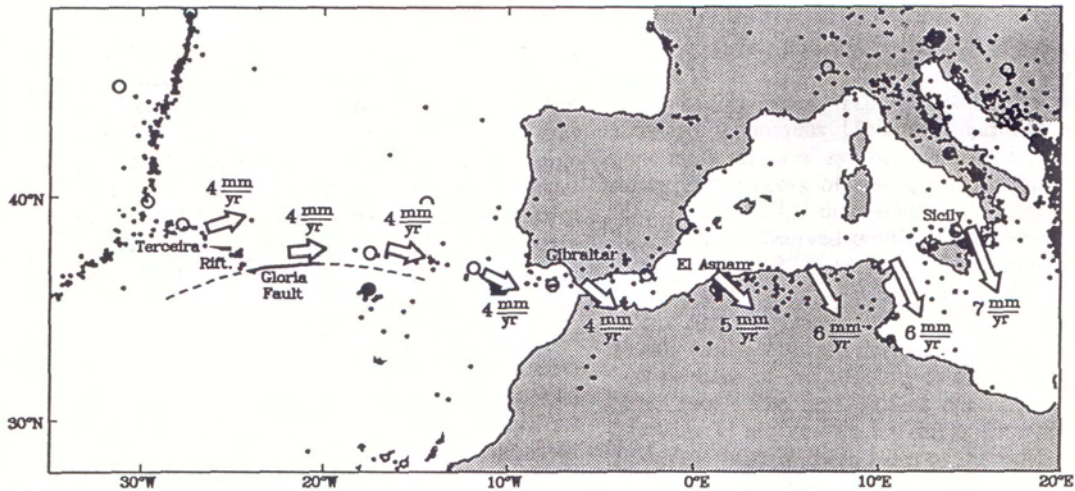


Figura 12A - Representação do movimento relativo entre as placas Eurasiática e Africana. As setas representam a velocidade da Eurásia, quando África se considera fixa. Os pontos traduzem os epicentros dos principais sismos que afectaram a região (in Argus et al., J. Geophys. Res., 1989).

A tectónica de placas é também a chave para fazer falar o passado geológico, permitindo reconstruir os ambientes geológicos do passado, como se ilustra na figura 12B. A relação entre as velocidades actuais e as velocidades geológicas é dada pela identidade

$$1 \text{ mm/ano} = 1 \text{ km/MA}$$

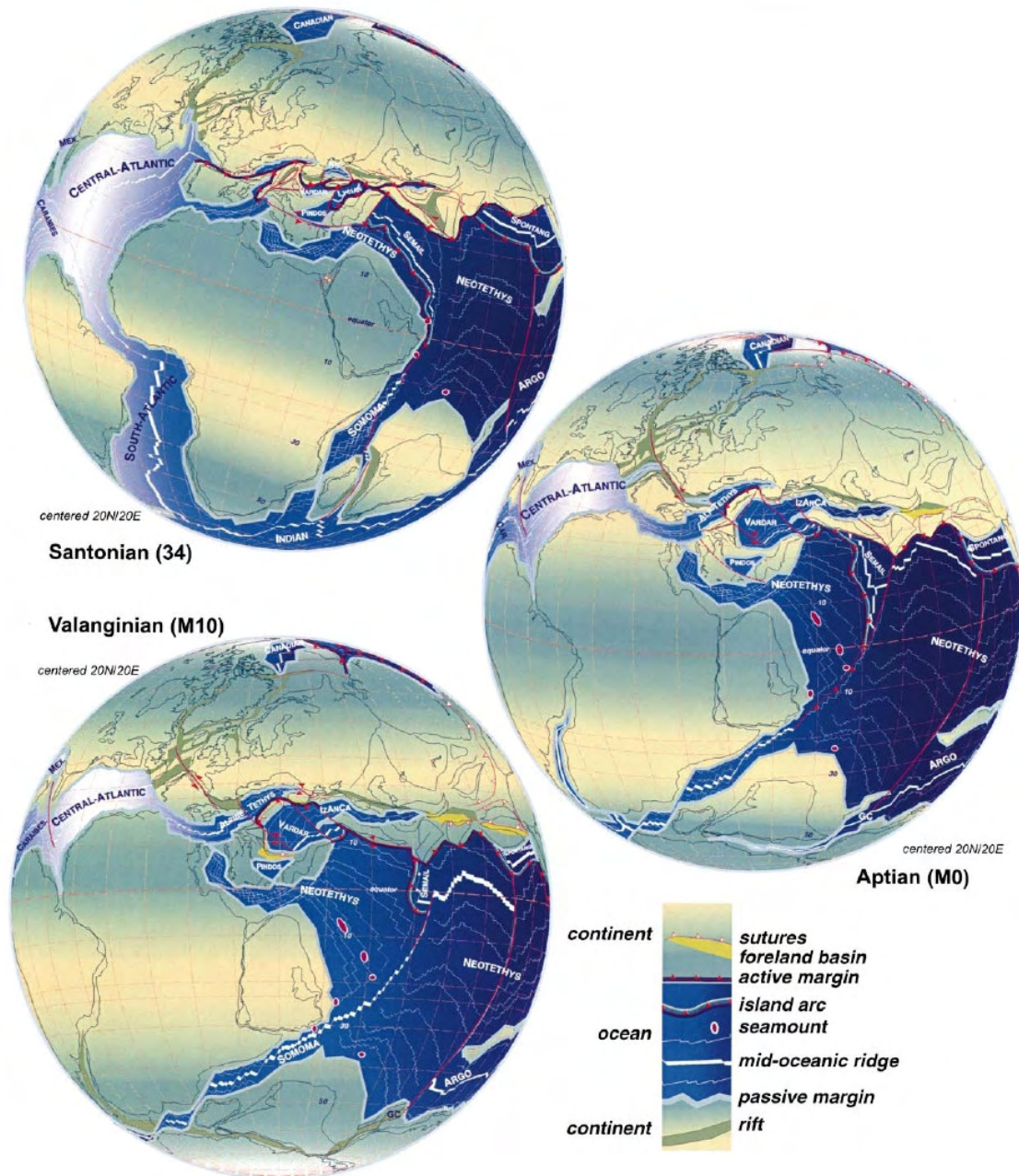


Figura 12B – Reconstituição da posição das placas tectónicas em 3 momentos do passado. (in Stampfli et al., E.P.S.L. Res., 2002).

7.1 Princípios básicos

Sem dúvida que uma grande parte do sucesso da Tectónica de Placas se pode atribuir à simplicidade dos seus fundamentos e à possibilidade de tratamento matemático que permitem. No desenvolvimento que segue, apenas serão referidos os

aspectos da Tectónica de Placas que, pelo seu formalismo, podem ser enquadrados no âmbito da Cinemática. Outros aspectos, como as consequências do movimento ou evolução das fronteiras de placas não serão abordados.

As hipóteses fundamentais da Tectónica de Placas podem ser enunciadas como segue:

(1) A camada exterior do Globo sólido é a litosfera que possui um comportamento rígido. Esta pode mover-se sobre a astenosfera dúctil de menor viscosidade.

(2) A litosfera encontra-se dividida num pequeno número de domínios, as placas, que se movem umas relativamente às outras. Sendo rígidas, toda a deformação resultante do seu movimento se concentra nas suas fronteiras (ver figura 13).

(3) O movimento das placas rígidas sobre o Globo é descrito matematicamente por conceitos de cinemática.

Em Geologia, à escala de vários milhões de anos, todas as placas se movem umas em relação às outras (figura 13), pelo que em cinemática de placas não existem velocidades absolutas, apenas velocidades relativas. Assim, a relatividade do movimento deve ser indicada explicitamente com a identificação de qual é a placa "móvel" e qual é a placa "fixa" usada como referência. Assim, a velocidade da placa **B** em relação à placa **A** deve ser identificada usando a convenção

$${}^A\vec{V}_B \quad \text{Fixa } \vec{V}_{\text{Móvel}}$$

Em Física esta convenção não é normalmente usada uma vez que está implícito que o sistema de referência se encontra ligado ao Laboratório, fixo em relação à superfície do Globo. Para pequenos intervalos de tempo esta aproximação é aceitável, embora as mais recentes medições geodéticas efectuadas com técnicas de VLBI, SLR ou GPS² tenham demonstrado que, de facto, a superfície da Terra se encontra em movimento, como uma *jangada de pedra*, com deslocamentos de várias dezenas de cm em períodos de alguns anos. Para tempos mais longos, como o Ma, então a aproximação do referencial de Laboratório é inaceitável. Embora não se faça uma discussão profunda sobre este tema, podemos referir que em Cinemática de Placas existem alguns referenciais, placas "fictícias", que são habitualmente usados como referência preferencial na descrição do movimento actual das placas. São eles o referencial "Hot Spots" (figura 13), Manto Inferior ou referencial de momento total nulo.

7.3 Cinemática de Placas no Plano

Para melhor compreender os fundamentos formais da cinemática de placas rígidas é conveniente iniciar o seu estudo pelo caso mais simples do movimento no plano. Apesar do Globo não ser plano, esta aproximação tem uma aplicação concreta no caso em que a dimensão da zona em estudo tem uma pequena extensão, da ordem de algumas centenas de quilómetros.

² VLBI = Very Large Baseline Interferometry; SLR – Satellite Laser Ranging; GPS – Global Positioning System.

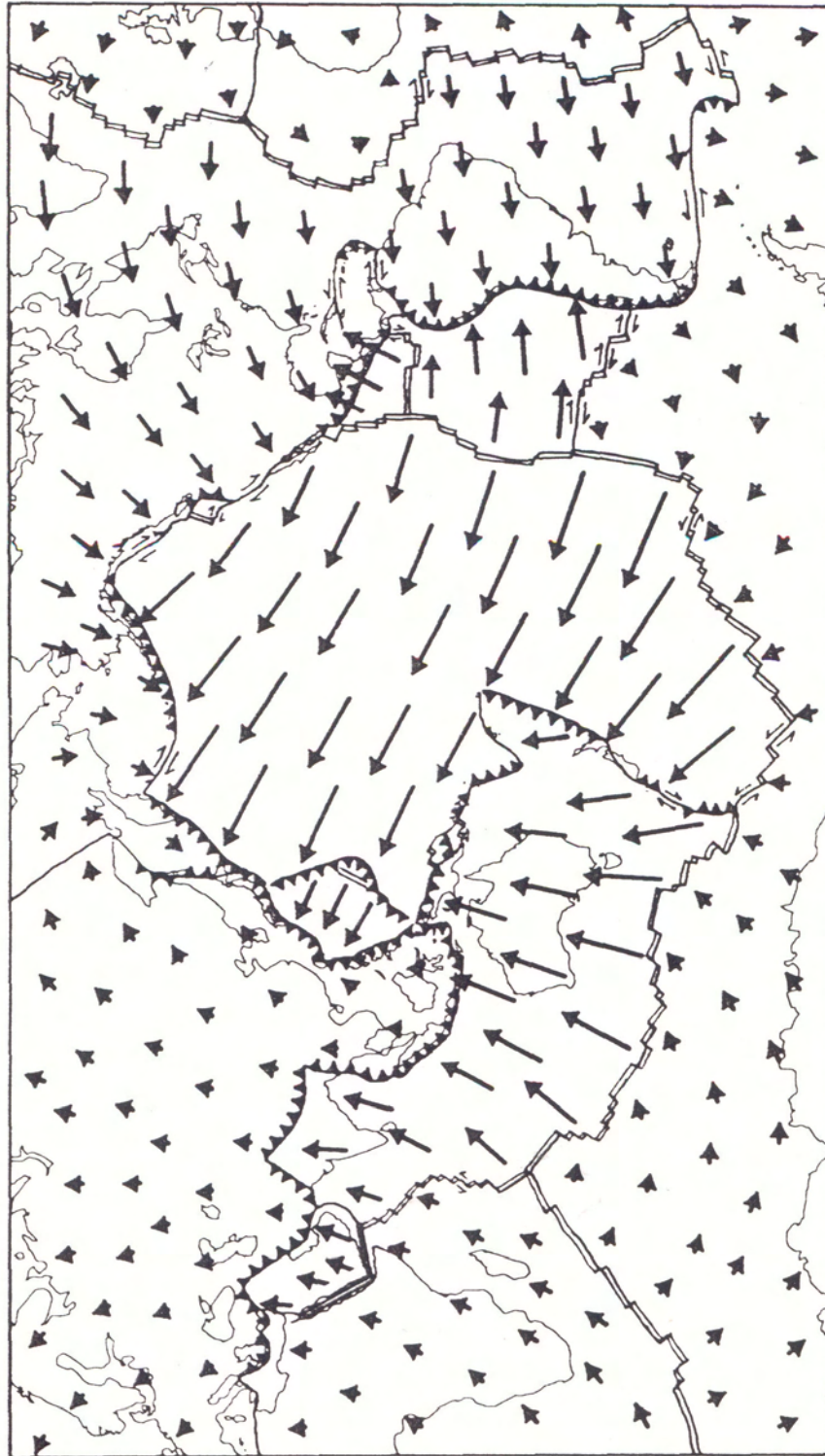


Figura 13 - Representação das principais placas rígidas nas quais se encontra dividida a litosfera. Os vectores representam a velocidade actual das placas em relação ao referencial de "Hot Spots" (in Cox e Hart, Blackwell, 1986).

Imaginemos então uma placa designada por **B** na qual se recorta um pedaço rectangular que representa a placa **A**, tal como se ilustra na figura 14a. Admitamos que a placa **A** se desloca de Oeste para Este em relação à placa **B**, como indica o vector ${}_{B}\vec{V}_A$ na figura 14a. Ao fim de algum tempo, a placa **A** ter-se-á deslocado em relação à placa **B** (figura 14b) e podemos assim identificar **3 tipos de fronteiras**. Na fronteira 1 observa-se o afastamento entre as placas A e B devendo o espaço vazio formado ser preenchido por criação de novas placas, tal como ocorre nas dorsais médio-oceânicas. Trata-se assim de uma **fronteira divergente**. Nas fronteiras 2 e 4 ambas as placas deslizam uma sobre a outra, sem ocorrer destruição ou criação de novas placas. São **fronteiras conservativas**, semelhantes às falhas transformantes nos oceanos. Na fronteira 3 ocorre uma situação de conflito uma vez que as placas A e B ocupam o mesmo espaço, assinalado a tracejado na figura 14b. É uma **fronteira convergente**. No Globo esta situação de conflito é resolvida pela destruição de uma das placas nas zonas de subducção.

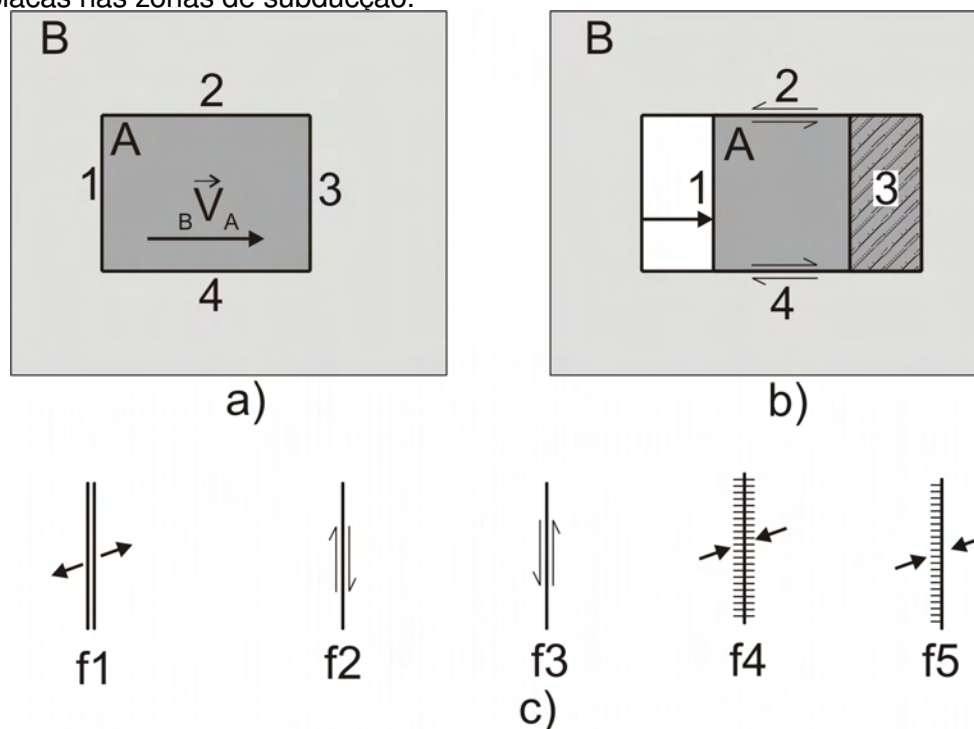


Figura 14 - Movimento de translação da placa **A** em relação à placa **B** com a definição de 4 fronteiras, 1,2,3 e 4. a) Situação inicial; b) situação após um deslocamento de A para Este; c) Os diferentes tipos de fronteiras de placas.

A figura 14c mostra como se identificam graficamente os diferentes tipos de fronteiras de placas: f1 – fronteira divergente oblíqua, o esquema representa uma dorsal; f2 – fronteira conservativa em deslizamento direito; f3 - fronteira conservativa em deslizamento esquerdo; f4 – fronteira convergente em que nenhuma das placas entra em subducção (formação de cadeia de montanhas) ou quando o sentido da subducção é desconhecido; f5 – fronteira convergente resolvida com uma zona de subducção em que os traços marcam a placa que fica por cima.

Na situação descrita na figura 14, a placa **A** tem um movimento de translação e todos os pontos sobre ela têm a mesma velocidade. A reconstituição da posição passada das placas tem evidenciado que o movimento destas é constante durante largos períodos de tempo, intercalados por curtos períodos em que há uma variação rápida das velocidades, os períodos de reorganização das placas. Sendo assim, o movimento das placas no plano, tal como foi descrita anteriormente, é fundamentalmente um **movimento rectilíneo e uniforme**.

No movimento rectilíneo uniforme o vector velocidade $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$ é constante e tem-se

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v} t \quad \begin{cases} x = x_o + v_x t \\ y = y_o + v_y t \end{cases}$$

A velocidade relativa que se obtém ao se trocarm as placas "móvel" com a "fixa" é a velocidade simétrica. Esta lei pode ser descrita pela equação

$${}_B \vec{v}_A = - {}_A \vec{v}_B$$

7.4 Movimento relativo de várias placas: o espaço de velocidades

A descrição cinemática do movimento de placas torna-se mais interessante e útil quanto é necessário considerar 3 ou mais placas em interacção. Nesta situação, a compreensão da movimentação das placas deve ser clarificada pela representação da velocidade das placas num diagrama vectorial em que o eixo X coincide com a direcção E e o eixo Y com a direcção N. Esse diagrama designa-se por espaço de velocidades e a sua construção ilustrada com a discussão de dois exemplos.

Considere-se então a associação de placas rectangulares, **A**, **B** e **C**, apresentada na figura 15. Desta associação conhecem-se as velocidades relativas

$${}_A \vec{v}_B = 5 \vec{u}_x + 5 \vec{u}_y \text{ cm/ano e } {}_B \vec{v}_C = -10 \vec{u}_y \text{ cm/ano}$$

pretendendo-se determinar a velocidade de **C** em relação a **A**, ${}_A \vec{v}_C$. No diagrama de velocidades cada placa é representada por um ponto e o vector velocidade relativa une nas suas extremidades as placas "móvel" e "fixa", tendo sempre origem na placa "fixa" e extremidade na placa "móvel". Começamos então por escolher uma das placas para ocupar a origem do referencial de velocidades. Seja então a placa A (figura 15b). O vector ${}_A \vec{v}_B$ tem origem em A ("fixa") e extremidade em B ("móvel"), o que permite obter a representação da placa B (figura 15b). O vector ${}_B \vec{v}_C$ tem origem em B ("fixa") e extremidade em C ("móvel"), o que permite obter agora a representação da placa C (figura 15c). É então agora fácil obter a velocidade relativa que faltava, isto é, a velocidade da placa C em relação à placa A, ${}_A \vec{v}_C$. A representação vectorial encontra-se ilustrada na figura 15d. Podemos assim obter finalmente a relação existente entre as 3 velocidades, o que constitui uma das leis do movimento relativo

$${}_A \vec{v}_C = {}_A \vec{v}_B + {}_B \vec{v}_C = {}_B \vec{v}_C + {}_A \vec{v}_B$$

Tal como se mostra na equação anterior, a adição de velocidades, assim como a adição de quaisquer vectores, é uma operação comutativa. Usando a representação vectorial das velocidades, obtemos para a velocidade relativa desconhecida a

expressão

$${}^A\vec{V}_C = 5\vec{u}_x - 5\vec{u}_y \text{ cm/ano}$$

A identificação do tipo de fronteira entre placas, *convergente*, *divergente* ou *conservativa*, obtém-se pela relação geométrica entre a distribuição das placas e a velocidade relativa entre elas. Cada fronteira apenas envolve duas placas e por isso apenas a velocidade relativa entre elas importa nesta discussão. Podemos por exemplo recortar mentalmente a placa "móvel" e observar o seu movimento relativo em relação à placa "fixa". No exemplo da figura 15a a fronteira 1 envolve as placas B e C. Sabe-se que C se move para Sul em relação a B, vide vector ${}^B\vec{V}_C$. Então em 1 não existe destruição nem geração de placa pelo que se trata de uma fronteira conservativa. Atendendo ao movimento relativo das placas, o desligamento é esquerdo. A fronteira 2 envolve as placas A e C, tendo-se C a deslocar para SE em relação a A, vector ${}^A\vec{V}_C$, pelo que nesta fronteira se tem um conflito de espaço, trata-se de uma fronteira convergente oblíqua. Como se desconhece o sentido da subducção, deve-se usar o símbolo indicado na figura 15c. Finalmente a fronteira 3 envolve as placas A e B, tendo-se B a mover para NE em relação a A, vector ${}^A\vec{V}_B$. A e B estão a afastar-se ao longo da fronteira 3 pelo que se trata de uma fronteira divergente. Temos uma dorsal oblíqua, como se ilustra na figura 15c.

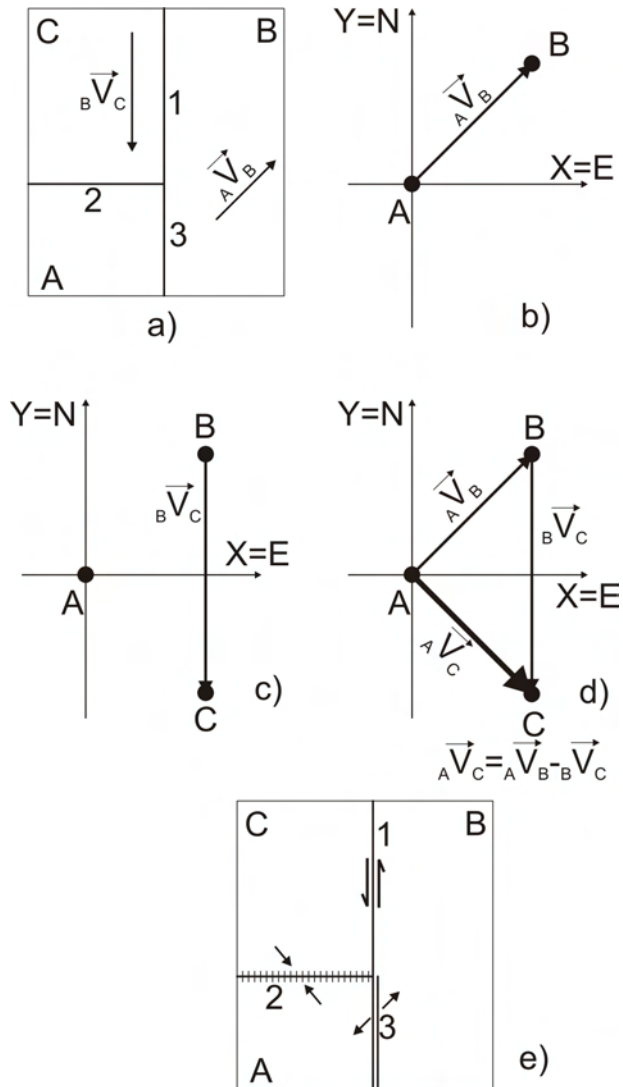


Figura 15 - Movimento relativo entre 3 placas e discussão das 3 fronteiras que se formam entre elas. Em a) os vectores têm metade da dimensão usada na representação no diagrama de velocidades.

Pode ocorrer frequentemente uma situação ligeiramente diferente da anterior, na qual se conhecem o movimento de placas **A** e **B** em relação a uma placa **C** fixa comum, isto é, são conhecidos os vectores ${}^C\vec{V}_A$ e ${}^C\vec{V}_B$, pretendendo-se determinar a velocidade relativa entre **A** e **B**, ${}^A\vec{V}_B$. Nesta circunstância é evidente que a placa C, comum, deve ser colocada no centro do diagrama de velocidades, e a representação das velocidades relativas permite situar as placas A e B. Este procedimento é ilustrado na figura 16.

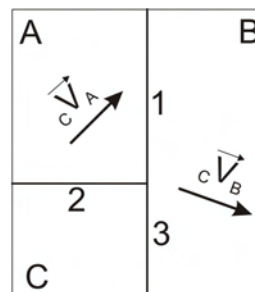
Fica assim claro que a velocidade relativa entre B e A é dada pela *diferença* entre as velocidades relativas conhecidas, através da relação

$${}_A\vec{V}_B = {}_C\vec{V}_B - {}_C\vec{V}_A$$

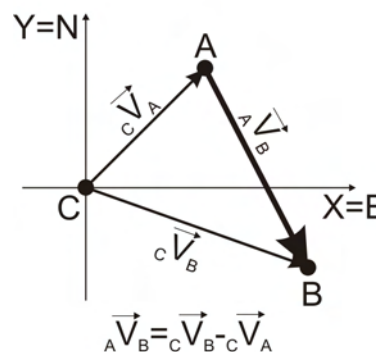
que pode ser traduzida como "a velocidade relativa é igual à velocidade da placa móvel menos a velocidade da placa fixa", ou de forma mais simples, é igual à "móvel menos a fixa".

O mesmo tipo de formalismo aqui desenvolvido pode ser aplicado à resolução de qualquer problema que envolva velocidades relativas entre 3 ou mais objectos. Por exemplo, ao se estudar o movimento de um barco que se desloca num rio que por sua vez se move em relação à margem, basta identificar o barco com a "placa" B, o rio com a "placa" R e a margem com a "placa" M. A relação entre as diferentes velocidades é dada então por qualquer das duas expressões anteriores

$${}_M\vec{V}_B = {}_M\vec{V}_R + {}_R\vec{V}_B \quad \text{ou} \quad {}_R\vec{V}_B = {}_M\vec{V}_B - {}_M\vec{V}_R$$



a)



b)

Figura 16 - Movimento de 3 placas quando a placa C é usada como referência.

7.5 Rotação de placas, movimento circular uniforme

Um outro tipo de movimento, para além da translação, é permitido às placas, mesmo na aproximação plana. Na figura 17 apresenta-se de novo uma placa **B** na qual foi recortada uma placa **A** com a forma de um sector circular, podendo rodar em torno do ponto **E** graças a um braço rígido. O ponto E é um ponto fixo para ambas as placas A e B. O movimento de A em relação a B é neste caso uma rotação em torno de E. Este ponto designa-se por **pólo da rotação** ou **pólo de Euler**. Na figura 6b apresenta-se a mesma configuração de placas após uma rotação de um ângulo de θ graus. Observe-se que no movimento de rotação a trajectória de qualquer ponto da placa A é um arco de circunferência, cujo raio depende da distância do ponto ao centro da rotação **E**. Pontos mais distantes terão efectuado deslocamentos maiores, enquanto que os pontos mais próximos de **E** realizam deslocamentos menores. Em particular, um ponto da placa A coincidente com o centro da rotação teria um deslocamento nulo.

Este exemplo ilustra algumas das características essenciais do movimento de rotação de placas. Quando sujeita a uma rotação, todos os pontos de uma placa têm movimento circular descrevendo trajectórias que são arcos de circunferência concêntricos de centro em **E**. Embora os deslocamentos sejam diferentes, função do raio da trajectória, o ângulo θ que todos os pontos descrevem é o mesmo. A reconstituição da posição das placas mostra que durante largos períodos de tempo a rotação das placas é caracterizada pela descrição de ângulos iguais em tempos iguais, e por isso, os pontos que compõem uma placa têm um movimento circular

uniforme concêntrico no centro da rotação E .

Os detalhes do movimento circular uniforme foram já tratados num parágrafo anterior.

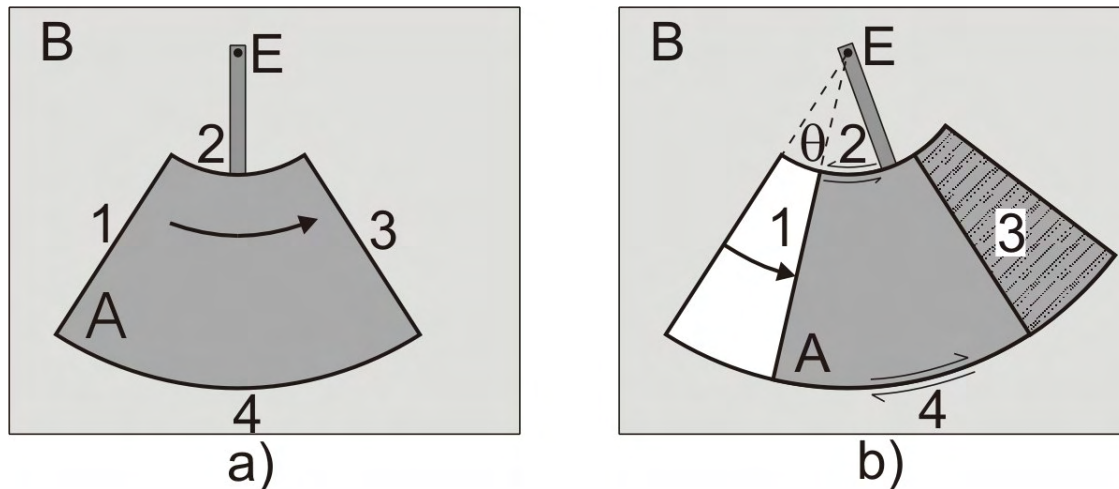


Figura 17 - Movimento de rotação da placa A em relação à placa B em torno do ponto E, fixo para ambas as placas.

7.6 Rotação de placas no Globo esférico

Os conceitos apresentados anteriormente para o movimento circular uniforme podem ser aplicados para o movimento de placas rígidas na superfície esférica do Globo graças à aplicação do **Teorema de Euler** do ponto fixo. Segundo este teorema, qualquer deslocamento à superfície do Globo esférico pode ser descrito como uma rotação em torno de um eixo de rotação adequado que passa pelo centro da Terra.

Esta situação encontra-se ilustrada na figura 18a. Uma placa triangular de vértices **A**, **B**, **C**, sofre uma rotação de 100° em torno do eixo **3** (ou Z), passando para a posição **A'**, **B'**, **C'**. Os pontos **A** e **C** estão mais afastados do eixo de rotação e por isso sofrem um deslocamento maior que o ponto **B**, mais próximo do eixo. O vector $\vec{\omega}$ com a direcção do eixo **3** traduz a velocidade angular responsável pelo movimento da placa indicado. A direcção de $\vec{\omega}$ intersecta a superfície do Globo em dois pontos, **E** e **E'** na figura 18a.

A rotação de um corpo em torno de um eixo é descrita pelo vector velocidade angular $\vec{\omega}$ tal como anteriormente no movimento circular uniforme e as trajectórias descritas por qualquer ponto são arcos de circunferência cujo raio é igual à distância r do ponto ao eixo de rotação, tal como se ilustra nas figuras 18b e 18c.

Podemos ainda constatar que a velocidade escalar v de qualquer ponto à superfície do Globo, devida ao movimento de rotação, é tanto maior quanto mais afastado estiver o ponto do eixo de rotação, sendo máxima para um ângulo de 90° , tal como se mostra nas figuras 18b e 18c.

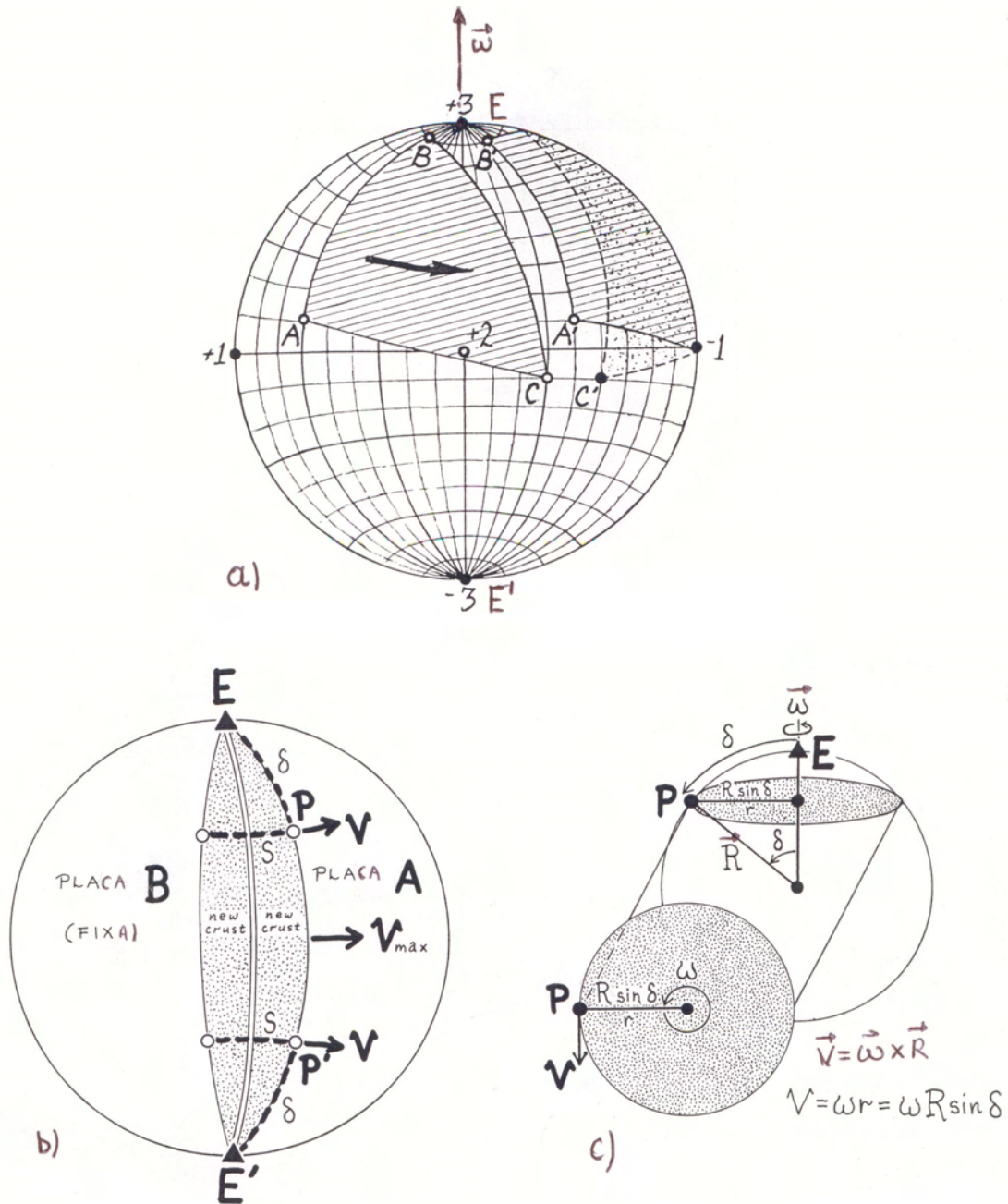


Figura 18 - Movimentação de placas à superfície de um Globo Esférico. Definição dos pólos de Euler E e E' e relação entre as velocidades linear e angular do movimento. A velocidade máxima de uma placa é atingida para os pontos afastados de 90° em relação ao eixo de rotação EE' (in Cox e Hart, Blackwell, 1986)

Se for R_T o raio da Terra e \vec{R} o vector posição do ponto, então a relação entre \vec{v} e $\vec{\omega}$ é dada por

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Usando a definição do módulo do produto externo ou a construção geométrica da figura 18c, é fácil verificar que se tem

$$v = \omega r = \omega R_T \text{ sen } \delta$$

Os pontos **E** e **E'** que definem à superfície do Globo o eixo de rotação de uma placa têm a designação de **pólos de Euler** (ver exemplo na figura 18). Normalmente basta a indicação de um pólo para definir completamente o eixo, e por consequência a direcção do vector $\vec{\omega}$, uma vez que pelo teorema de Euler todos os eixos de rotação passam pelo centro do Globo. Se for **O** o centro do Globo, então o vector \vec{OE} tem a mesma direcção e sentido que $\vec{\omega}$ enquanto que $\vec{OE'}$ tem o sentido contrário. Por isso, **E** designa-se por **pólo** enquanto que **E'** é o **anti-pólo** de Euler do movimento.

A rotação da placa **B** ("móvel") em relação à placa **A** ("fixa") é representada no Globo pela velocidade angular ${}_A\vec{\omega}_B$. O vector $\vec{\omega}$ pode ser dado através das suas coordenadas num sistema cartesiano (X,Y,Z) tal como se mostra na figura 19.

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{u}_x + \omega_y \vec{u}_y + \omega_z \vec{u}_z$$

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

No entanto, embora esta seja a forma mais adequada para a realização de operações algébricas, as coordenadas cartesianas não permitem definir rapidamente qual a orientação do eixo de rotação ou a rapidez com que se processa o movimento angular, $\omega = |\vec{\omega}|$.

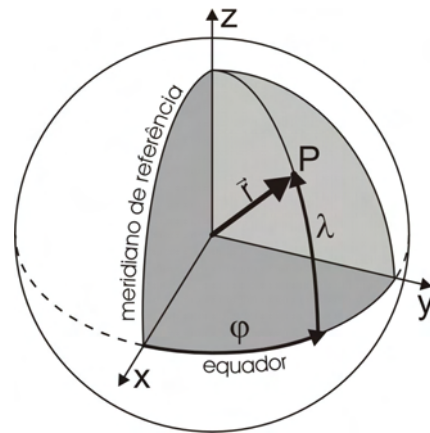


Figura 19 - Sistemas de coordenadas cartesianas e esféricas para a representação da velocidade angular e dos vectores posição.

Por isso, é frequentemente preferida a representação do vector $\vec{\omega}$ através das coordenadas latitude e longitude do pólo de Euler **E**, $[\lambda_E, \varphi_E]$, que definem a direcção e sentido de

$\vec{\omega}$, acrescentando a informação sobre o módulo da velocidade angular, $\omega = |\vec{\omega}|$:

$$\vec{\omega} = [\lambda_E, \varphi_E, \omega]$$

A relação entre ambas as representação é dada simplesmente pelas leis de transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas esféricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \omega \cos \lambda_E \cos \varphi_E \\ \omega_y = \omega \cos \lambda_E \text{ sen } \varphi_E \\ \omega_z = \omega \text{ sen } \lambda_E \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \\ \lambda_E = \text{sen}^{-1} \frac{\omega_z}{\omega} \\ \varphi_E = \text{tan}^{-1} \frac{\omega_y}{\omega_x} \end{array} \right.$$

As leis do movimento relativo de duas, três ou mais placas estudadas para o caso do movimento de translação são válidas para a rotação sem qualquer alteração:

$${}_A\vec{\omega}_B = - {}_B\vec{\omega}_A \quad {}_A\vec{\omega}_C = {}_A\vec{\omega}_B + {}_B\vec{\omega}_C \quad {}_A\vec{\omega}_B = {}_R\vec{\omega}_B - {}_R\vec{\omega}_A$$

Na Tabela que segue são apresentados os resultados publicados em 1990 para a movimentação actual das principais placas (considerada como a média dos últimos 3 Ma). Neste modelo, designado por NUVEL-1, a informação da velocidade angular de cada placa em relação à placa Pacífica, considerada como fixa, é dada em termos dos seus pólos de Euler e também das suas coordenadas cartesianas.

Tabela - Pólos instantâneos de rotação, tomando a placa Pacífica (PA) como fixa. (in DeMets et al., Geophys. J. Int., 1990).

Placa	Latitude °N	Longitude °E	ω °/Ma	ω_x rad/Ma	ω_y rad/Ma	ω_z rad/Ma
AF-África	59.160	-73.174	0.9695	0.002511	-0.008303	0.014529
AN-Antártica	64.315	-83.984	0.9093	0.000721	-0.006841	0.01432
AR-Arábia	59.658	-33.193	1.1616	0.008570	-0.005607	0.017496
AU-Austrália	60.080	1.742	1.1236	0.00977	0.000297	0.016997
CA-Caribe	54.195	-80.802	0.8534	0.001393	-0.008602	0.012080
CO-Cocos	36.823	-108.629	2.0890	-0.009323	-0.027657	0.021853
EU-Eurásia	61.066	-85.819	0.8985	0.000553	-0.007567	0.013724
IN-Índia	60.494	-30.403	1.1539	0.008555	-0.005020	0.017528
NZ-Nazca	55.578	-90.096	1.4222	-0.000023	-0.014032	0.020476
NA-América do N.	48.709	-78.167	0.7829	0.001849	-0.008826	0.010267
SA-América do S.	54.999	-85.752	0.6657	0.000494	-0.006646	0.009517

Exemplo 10 *Aplicação da cinemática de placas na esfera. Qual é a velocidade de Lisboa em relação a New York, devido ao movimento das placas tectónicas? Consideremos a situação de Lisboa, com coordenadas aproximadas (39°N, 9°W), situada na placa Eurasiática (EU). Como sabemos, a Eurásia está actualmente a afastar-se da placa Norte Americana (NA) onde se encontra New York, com acreção de nova placa ao longo da Dorsal Médio-Atlântica. Usando os dados da tabela anterior e as leis do movimento relativo, podemos calcular a velocidade da Eurásia em relação à América do Norte como*

$${}_{NA}\vec{\omega}_{EU} = {}_{PA}\vec{\omega}_{EU} - {}_{PA}\vec{\omega}_{NA} = (-0.001296, 0.001259, 0.003457) \text{ rad/Ma}$$

O pólo de Euler para esta velocidade relativa obtém-se pela aplicação das leis de transformação de coordenadas cartesianas em coordenadas esféricas

$${}_{NA}\vec{\omega}_{EU} = [\lambda_E, \varphi_E, \omega] = [62.4^\circ N, 44.2^\circ E, 0.223^\circ / \text{Ma}]$$

A velocidade de Lisboa em relação à placa Norte Americana, por exemplo Nova York, é dada pela relação vectorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ onde \vec{R} é o vector posição de Lisboa, que se obtém usando as mesmas leis de transformação de coordenadas

$$\vec{R}(\text{Lisboa}) = (4912, -778, 4028) \text{ km}$$

Obtém-se finalmente

$${}_{NY}\vec{v}_{LX} = {}_{NA}\vec{\omega}_{EU} \times \vec{R}(LX) = 7.8\vec{u}_x + 22.2\vec{u}_y - 5.2\vec{u}_z \text{ km/Ma}$$

Em módulo, esta velocidade vale 24 km/Ma ou 2.4 cm/ano.