Mecânica Quântica

1ª Série

1. A fim de ter uma ideia das grandezas de alguns parâmetros quânticos associados a várias partículas, determine, utilizando a relação de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}\,, \tag{1}$$

o comprimento de onda de:

1.1. Uma partícula de poeira com diâmetro de $\sim 1\mu m$, cuja massa é da ordem de grandeza de $m \approx 10^{-15}kg$, e que se move com uma velocidade de $v \approx 1mm/s$. (Note que λ é desprezável face às dimensões da partícula de poeira).

1.2. Um neutrão térmico ($m_n \simeq 1.67 \times 10^{-27}kg$) cuja velocidade, correspondente à energia térmica média, a uma temperatura T, é dada por

$$\frac{1}{2}m_n v^2 = \frac{p^2}{2m_n} \simeq \frac{3}{2}kT\,, \tag{2}$$

em que k é a constante de Boltzmann ($k \simeq 1.38 \times 10^{-23}J/K$).

1.3. Um electrão ($m_e \simeq 0.9 \times 10^{-30}kg$), que é acelerado atravês de um potencial eléctrico V. Note que o electrão adquire uma energia cinética de $E = qV$, em que q é a sua carga eléctrica ($q = 1.6 \times 10^{-19}C$).

1.4. Um electrão relativista, com energia da ordem de grandeza de $E \sim 1GeV = 10^9eV$ ($1eV = 1.6 \times 10^{-19}J$), cuja velocidade é proxima da velocidade da luz, c. Relembre que a energia de uma partícula relativista com a massa em repouso, m_0, é dada por $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$. No entanto, no presente caso, temos $m_ec^2 \simeq 0.5 \times 10^6eV$, o que é desprezável face à energia de $1GeV$. Deste modo, podemos considerar a aproximação $E \simeq pc$.

2. Considerando as restrições impostas pela relação de incerteza

$$\Delta x\, \Delta p \gtrsim \hbar\,, \tag{3}$$

verifique que:

2.1. A relação de incerteza é completamente negligível a uma escala macroscópica. Para este fim, considere uma partícula de poeira, cujo diâmetro é de $1\mu m$ e massa $m \approx 10^{-15}kg$, que se move com uma velocidade de $v \simeq 10^{-3}m/s$.

2.2. A relação de incerteza rejeita o modelo semi-clássico de Bohr. Relembre que este último permite órbitas que são definidas *à priori* por regras de quantização, nomeadamente, que o raio r de uma órbita circular e o momento linear, $p = mv$, de um electrão, que descreve uma trajectória ao longo da órbita, obedecem à regra de $p\,r = n\hbar$ (em que $n \in N$).

3. Relação entre os problemas tri- e unidimensionais.

Demonstre que o pacote de onda livre $[V(\vec{r}) = 0]$, cuja função de onda é descrita pela expressão

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\vec{k})\, e^{i\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - w(\vec{k})t\right]} d^3k \,, \tag{4}$$

pode ser expressa do seguinte modo:

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_1(x,t) \times \psi_2(y,t) \times \psi_3(z,t). \tag{5}$$

4. Pacote de onda gaussiana.

Considere uma partícula livre, num modelo unidimensional gaussiano, cuja função de onda é dada por

$$\psi(x,t) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2}\, e^{i[kx - w(k)t]}\, dk \,, \tag{6}$$

com $w(k) = \hbar k^2/2m$ (que é a relação de dispersão para uma partícula livre).

4.1. Determine a expressão explícita da função de onda (6).

4.2. Verifique que a norma do pacote de onda, $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2\, dx$, é independente da evolução temporal.

4.3. Utilizando as propriedades das expressões obtidas nas alíneas anteriores, faça uma análise da variação temporal da espessura deste pacote de onda gaussiano e confirme o fenómeno do espalhamento da função de onda.