Mecânica Quântica

2ª Série

1. Resolva a equação de Schrödinger para um poço potencial com lados infinitos e com uma espessura de $2a$, dado por:

$$V(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{se} \quad |x| \leq a \\ \infty, & \text{se} \quad |x| > a \end{array} \right. . \tag{1}$$

2. Um electrão está confinado num poço potencial unidimensional de lados infinitos, com uma espessura de $6 \times 10^{-10}\, m$. Determine:

2.1. Os três valores mais baixos permitidos da energia do electrão.

2.2. O comprimento de onda da onda electromagnética que excita o electrão do seu nível fundamental para o valor mais elevado desses três valores.

3. Se u_m e u_n são as funções de onda correspondentes a dois estados de energia de uma partícula confinada num poço potencial com lados infinitos, demonstre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_m\, u_n\, dx = 0\,, \qquad \text{se} \qquad n \neq m\,. \tag{2}$$

4. Considere uma partícula de massa m, sujeita a um potencial unidimensional $V(x)$, dado por

$$V = \infty, \quad x < 0\,; \qquad V = 0, \quad 0 \leq x \leq a\,; \qquad V = V_0, \quad x > a\,. \tag{3}$$

Demonstre que os estados ligados ($E < V_0$) deste sistema existem apenas se $k \cot ka = -\kappa$, em que $k^2 = 2mE/\hbar^2$ e $\kappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$.

5. Demonstre que se $V_0 = 9\hbar^2/2ma^2$, apenas existe um estado ligado do sistema descrito no exercicio 4. Calcule a sua energia em termos de V_0, utilizando um método de iteração.

6. Resolva a equação de Schrödinger para um poço potencial finito, descrito por

$$V(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -V_0, & \text{se} \quad |x| \leq a \\ 0, & \text{se} \quad |x| > a \end{array} \right. . \tag{4}$$

7. Considere uma dispersão de partículas, com energia $E > 0$, num potencial unidimensional de função delta. Sem perda de generalidade significativa, considere que as partículas incidem pela esquerda do potencial.

7.1. Aplicando as condições de continuidade apropriadas em $x = 0$, determine a função de onda $\psi_E(x)$, e escreva-a na seguinte forma:

$$\psi_E(x) = e^{ikx} + F e^{ik|x|} \,. \tag{5}$$

com $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

7.2. Calcule a probablidade da densidade de corrente e demonstre que é contínua para qualquer valor.

7.3. Considere o caso específico de um acoplamento atrativo, $g < 0$, e resolva o problema do estado ligado para $E < 0$. Determine a respetiva função de onda e calcule o valor da energia do estado ligado.

7.4. Demonstre que a energia do único estado ligado corresponde a um polo do coeficiente F, que foi previamente calculado na alínea 7.1.

8. Considere um potencial unidimensional, que contém uma componente com uma "função step" e outra contribuição de uma função de delta, dado por (vide fig. 1)

$$V(x) = V\,\Theta(x) - \frac{\hbar^2 g}{2m}\,\delta(x) \,. \tag{6}$$

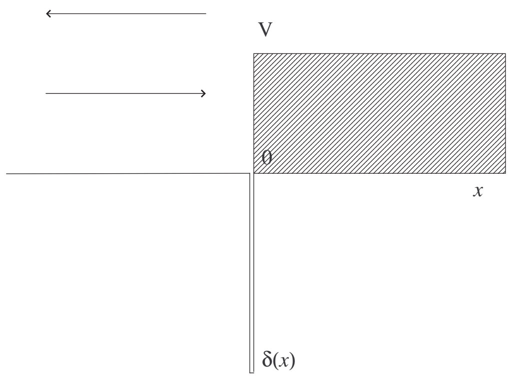

Figura 1: Potencial com uma "step function", e uma contribuição de uma função de delta atrativa.

8.1. Calcule o coeficiente de reflexão para partículas incidentes, pela esquerda, com energia de $E > V$.

8.2. Considere o caso $E < 0$. Determine os valores próprios e funções próprias para quaisquer soluções de estados ligados.