Mecânica Quântica: 2014-2015

4ª Série

1. Traço de um operador.

1.1. **Invariância do traço:** Prove que o traço de uma matriz, que representa um operador A, numa base arbitrária não depende da mesma.
(*vide* **CT, complemento** $B_{II}.1.b$**, pág. 167**)

1.2. **Propriedades importantes:** Prove as seguintes propriedades do traço de operadores:

- $\text{Tr}\ AB = \text{Tr}\ BA$,
- $\text{Tr}\ ABC = \text{Tr}\ BCA = \text{Tr}\ CAB$

(*vide* **CT, complemento** $B_{II}.1.c$**, pág. 167**)

2. Considere dois operadores, A e B, correspondentes a duas grandezas físicas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. O operador A (resp. B) tem dois estados próprios normalizados, $|\phi_i\rangle$, $i = 1, 2$ (resp. $|\chi_i\rangle$, $i = 1, 2$) associados aos valores próprios a_i, $i = 1, 2$ (resp. b_i, $i = 1, 2$). Tem-se além disso

$$|\phi_1\rangle = \frac{2\,|\chi_1\rangle + 3\,|\chi_2\rangle}{\sqrt{13}}, \qquad |\phi_2\rangle = \frac{3\,|\chi_1\rangle - 2\,|\chi_2\rangle}{\sqrt{13}}. \tag{1}$$

2.1. Um sistema é sujeito a uma medida de $\mathcal{A}$ que dá o resultado a_1. A seguir mede-se $\mathcal{B}$, e depois novamente $\mathcal{A}$. Mostre que a probabilidade de obter novamente a_1 nesta última medida é 97/169.

2.2. Mostre que com (1) o conjunto $|\phi_i\rangle$, $i = 1, 2$ está ortonormalizado se e só se o conjunto $|\chi_i\rangle$, $i = 1, 2$ está ortonormalizado.

2.3. Mostre que como A e B são hermíticos, a_i e b_i, $i = 1, 2$ são reais.

2.4. Dê condições para que A e B comutem.

3. Prove as seguintes propriedades de comutação de operadores:

- $[A, B] = -[B, A]$;
- $[A, (B + C)] = [A, B] + [A, C]$;
- $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$;
- $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$;

- $[A,B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$.

(*vide* **CT, complemento** $B_{II}.2.b$**, pág. 168**)

4. Prove as seguintes relações:

- $[X, P^2] = 2i\hbar P$;
- $[X, P^n] = i\hbar n P^{n-1}$;
- $[X, F(P)] = i\hbar F'(P)$.

(*vide* **CT, complemento** $B_{II}.4.c$**, pág. 171**)

5. Considere dois operadores A e B que, por hipótese, comutam com o seu comutador, i.e., $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. Para este caso, prove a fórmula de Glauber:

$$e^A\, e^B = e^{A+B}\; e^{\frac{1}{2}[A,B]}\,. \qquad (2)$$

(*vide* **CT, complemento** $B_{II}.5.d$**, pág. 174**)

6. Operadores unitários.

6.1. Se A é um operador Hermítico, prove que o operador $T = e^{iA}$ é unitário.

(*vide* **CT, complemento** $C_{II}.1.a$**, pág. 176**)

6.2. Seja $|v_i\rangle$ uma base ortonormada discreta do espaço de estados ξ. Designe por $|\tilde{v}_j\rangle$ a transformada do vector $|v_i\rangle$ sob a acção de um operador unitário U, i.e., $|\tilde{v}_i\rangle = U|v_i\rangle$. Prove que:

- os vectores $|\tilde{v}_i\rangle$ são ortonormados e que constituem uma base de ξ;
- o inverso também é válido, i.e., se $|v_i\rangle$ e $|\tilde{v}_i\rangle$ constituem bases ortonormadas de ξ, e que se transformam da seguinte forma $|\tilde{v}_i\rangle = U|v_i\rangle$, logo A é um operador unitário.

(*vide* **CT, complemento** $C_{II}.1.b$**, pág. 177**)

7. Operador de paridade.

7.1. Considere que o operador de paridade Π seja definido por $\Pi\,|r\rangle = |-r\rangle$, em que $|r\rangle$ é uma base de vectores do espaço de estados ξ_r. Prove que:

- o operador Π^2 é o operador identidade;
- o operador Π é Hermítico;

- o operador Π é unitário.

(*vide* **CT, complemento $F_{II}.1.b$, pág. 192**)

7.2. Considere a transformada de paridade $\tilde{B}$ de B definida por $\tilde{B} = \Pi B \Pi$, e que satisfaz a relação $\langle r| \tilde{B} |r'\rangle = \langle -r| B |-r'\rangle$. Em particular, se $\tilde{B} = +B$, diz-se que o operador B é par; se $\tilde{B} = -B$, diz-se que o operador B é ímpar. Prove que:

- o operador par B_+ comuta com o operador de paridade Π;
- o operador ímpar B_- anti-comuta com o operador de paridade Π.

(*vide* **CT, complemento $F_{II}.2$, pág. 195**)

7.3. No contexto da alínea anterior, prove que os operadores X e P_x são operadores ímpares.

8. Considere o Hamiltoniano H de uma partícula, num problema unidimensional, definido por:

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + V(X)\,, \tag{3}$$

em que os operadores X e P satisfazem a relação $[X, P] = i\hbar$. Os vectores próprios de H designam-se por $|\varphi_n\rangle$, tal que $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$, em que n é um índice discreto.

8.1. Demonstre a seguinte relação:

$$\langle\varphi_n| P |\varphi_{n'}\rangle = \alpha \langle\varphi_n| X |\varphi_{n'}\rangle \,, \tag{4}$$

em que α é um coeficiente que depende da diferença entre E_n e $E_{n'}$. Calcule α. (Sugestão: considere o comutador $[X, H]$).

8.2. Da relação definida na alínea anterior, deduza, utilizando a partição da unidade, a seguinte expressão:

$$\sum_{n'} (E_n - E_{n'})^2 \, \left| \langle\varphi_n| X |\varphi_{n'}\rangle \right|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2} \langle\varphi_n| P^2 |\varphi_n\rangle \,. \tag{5}$$

(*vide* **CT, complemento $H_{II}.2$, ex. 8, pág. 205**)

9. Seja H o operador Hamiltoniano de um sistema físico. Designe por $|\varphi_n\rangle$ os vectores próprios de H, com valores próprios E_n, i.e.,

$$H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \,. \tag{6}$$

9.1. Para um operador arbitrário A, prove a relação:

$$\langle\varphi_n|\,[A,H]\,|\varphi_n\rangle = 0\,. \tag{7}$$

9.2. Considere o problema uni-dimensional, em que o sistema físico é constituído por uma partícula de massa m, sujeita a um potencial $V(X)$. Neste caso, recorde que o operador H é definido por:

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + V(X)\,. \tag{8}$$

- Determine os comutadores $[H,P]$, $[H,X]$ e $[H,XP]$.
- Prove que o elemento de matriz $\langle\varphi_n|\,P\,|\varphi_n\rangle$ (interpretado como o valor médio do momento no estado $|\varphi_n\rangle$) é zero.
- Estabeleça uma relação entre $E_n = \langle\varphi_n|\,\frac{P^2}{2m}\,|\varphi_n\rangle$ (o valor médio da enegia cinética no estado $|\varphi_n\rangle$) e $\langle\varphi_n|\,X\frac{dV}{dX}\,|\varphi_n\rangle$.

(*vide* **CT, complemento H_{II}.2, ex. 9, pág. 205**)

10. Considere o Hamiltoniano do oscilador harmónico

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2\,. \tag{9}$$

10.1. Mostre que

$$[H,[H,X^2]] = (2\hbar\omega)^2X^2 - \frac{4\hbar^2}{m}H. \tag{10}$$

10.2. Calcule a representação do operador X^2 na base dos estados próprios de H e mostre em particular que os $\langle n|X^2|n'\rangle$ são nulos excepto se $n = n'$ ou $n = n' \pm 2$.

10.3. Calcule também a representaçãoo de X na mesma base, e use este resultado e o da alínea anterior para verificar explicitamente a relação

$$\langle n|X^2|n'\rangle = \sum_{l=0}^{\infty}\langle n|X|l\rangle\,\langle l|X|n'\rangle\,, \tag{11}$$

que decorre da partição da unidade.

11. Um determinado sistema mecânico-quântico possui apenas dois estados próprios de energia definidos por $|1\rangle$ e $|2\rangle$, respectivamente. O sistema também possui três outros observáveis (além da energia) designados por P, Q e R. Os estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ estão normalizados, mas não são necessariamente estados próprios de P, Q e R.

Determine os valores próprios possíveis de P, Q e R, com base nos seguintes conjuntos de dados "experimentais" (Nota: um conjunto de dados é não-físico):

$$(a) \quad \langle 1|\, P\, |1\rangle = 1/2\,, \qquad \langle 1|\, P^2\, |1\rangle = 1/4\,; \tag{12}$$

$$(b) \quad \langle 1|\, Q\, |1\rangle = 1/2\,, \qquad \langle 1|\, Q^2\, |1\rangle = 1/6\,; \tag{13}$$

$$(c) \quad \langle 1|\, R\, |1\rangle = 1\,, \qquad \langle 1|\, R^2\, |1\rangle = 5/4\,, \qquad \langle 1|\, R^3\, |1\rangle = 7/4\,. \tag{14}$$

12.

12.1. Prove as seguintes relações:

$$\langle p'|\, x\, |\alpha\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p'|\alpha\rangle \;, \tag{15}$$

$$\langle \beta|\, x\, |\alpha\rangle = \int dp'\, \phi_\beta^*(p') i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \phi_\alpha(p')\,, \tag{16}$$

em que $\phi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ e $\phi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ são as funções de onda no espaço dos momentos.

12.2. Qual é o significado físico de

$$\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right) \tag{17}$$

em que x é o operador da posição e Ξ é um determinado número com as dimensões de um momento? Justifica a tua resposta.