Mecânica Quântica

4ª Série

1. Traço de um operador.

1.1. **Invariância do traço:** Prove que o traço de uma matriz, que representa um operador A, numa base arbitrária não depende da mesma.

1.2. **Propriedades importantes:** Prove as seguintes propriedades do traço de operadores:

- Tr $AB =$ Tr BA,
- Tr $ABC =$ Tr $BCA =$ Tr CAB

2. Prove as seguintes relações:

- $[X, P^2] = 2i\hbar P$;
- $[X, P^n] = i\hbar n P^{n-1}$;
- $[X, F(P)] = i\hbar F'(P)$.

3. Considere dois operadores A e B que, por hipótese, comutam com o seu comutador, i.e., $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Para este caso, prove a fórmula de Glauber:

$$e^A \, e^B = e^{A+B} \, e^{\frac{1}{2}[A,B]} \, . \tag{1}$$

4. Operadores unitários.

4.1. Se A é um operador Hermítico, prove que o operador $T = e^{iA}$ é unitário.

4.2. Seja $|v_i>$ uma base ortonormada discreta do espaço de estados ξ. Designe por $|\tilde{v}_j>$ a transformada do vector $|v_i>$ sob a acção de um operador unitário U, i.e., $|\tilde{v}_i> = U|v_i>$. Prove que:

- os vectores $|\tilde{v}_i>$ são ortonormados e que constituem uma base de ξ;
- o inverso também é válido, i.e., se $|v_i>$ e $|\tilde{v}_i>$ constituem bases ortonormadas de ξ, e que se transformam da seguinte forma $|\tilde{v}_i> = U|v_i>$, logo A é um operador unitário.

5. Operador de paridade.

5.1. Considere que o operador de paridade Π seja definido por $\Pi|r>=|-r>$, em que $|r>$ é uma base de vectores do espaço de estados ξ_r. Prove que:

- o operador Π^2 é o operador identidade;
- o operador Π é Hermítico;
- o operador Π é unitário.

5.2. Considere a transformada de paridade $\tilde{B}$ de B definida por $\tilde{B} = \Pi B \Pi$, e que satisfaz a relação $< r|\tilde{B}|r' > = < -r|B| - r' >$. Em particular, se $\tilde{B} = +B$, diz-se que o operador B é par; se $\tilde{B} = -B$, diz-se que o operador B é ímpar. Prove que:

- o operador par B_+ comuta com o operador de paridade Π;
- o operador ímpar B_- anti-comuta com o operador de paridade Π.

5.3. No contexto da alínea anterior, prove que os operadores X e P_x são operadores ímpares.

6. Considere o Hamiltoniano H de uma partícula, num problema unidimensional, definido por:

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + V(X) , \tag{2}$$

em que os operadores X e P satisfazem a relação $[X, P] = i\hbar$. Os vectores próprios de H designam-se por $|\varphi_n>$, tal que $H|\varphi_n>= E_n|\varphi_n>$, em que n é um índice discreto.

6.1. Demonstre a seguinte relação:

$$< \varphi_n|P|\varphi_{n'} >= \alpha < \varphi_n|X|\varphi_{n'} > , \tag{3}$$

em que α é um coeficiente que depende da diferença entre E_n e $E_{n'}$. Calcule α. (Sugestão: considere o comutador $[X, H]$).

6.2. Da relação definida na alínea anterior, deduza, utilizando a partição de unidade, a seguinte expressão:

$$\sum_{n'} (E_n - E_{n'})^2 \ \Big| < \varphi_n|X|\varphi_{n'} > \Big|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2} < \varphi_n|P^2|\varphi_n > \ . \tag{4}$$

7. Seja H o operador Hamiltoniano de um sistema físico. Designe por $|\varphi_n>$ os vectores próprios de H, com valores próprios E_n, i.e.,

$$H|\varphi_n>= E_n|\varphi_n> \ . \tag{5}$$

7.1. Para um operador arbitrário A, prove a relação:

$$<\varphi_n|[A,H]|\varphi_n>= 0\,. \tag{6}$$

7.2. Considere o problema uni-dimensional, em que o sistema físico é constituído por uma partícula de massa m, sujeita a um potencial $V(X)$. Neste caso, recorde que o operador H é definido por:

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + V(X)\,. \tag{7}$$

- Determine os comutadores $[H,P]$, $[H,X]$ e $[H,XP]$.
- Prove que o elemento de matriz $<\varphi_n|P|\varphi_n>$ (interpretado como o valor médio do momento no estado $|\varphi_n>$) é zero.
- Estabeleça uma relação entre $E_n =<\varphi_n|\frac{P^2}{2m}|\varphi_n>$ (o valor médio da enegia cinética no estado $|\varphi_n>$) e $<\varphi_n|X\frac{dV}{dX}|\varphi_n>$.