Mecânica Quântica: 2014-2015

6ª Série

1. Considere as matrizes de Pauli, dadas por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1. Demonstre que estas matrizes são Hermíticas. Determine os seus valores próprios e os vetores próprios (exprimindo a expansão normalizada na base $\{| +\rangle\, ,\ | -\rangle\}$.

1.2. Prove as seguintes relações:

- $\det(\sigma_j) = -1$ com $(j = x, y, z)$;
- $\mathrm{Tr}(\sigma_j) = 0$;
- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$, em que I é a matriz de unidade 2×2;
- $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$;
- $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$.

(*vide* **CT, complemento** $A_{IV}.1, 2$**, págs. 417-418**)

2. Considere uma partícula de spin 1/2 e com um momento magnético $\mathbf{M} = \gamma \mathbf{S}$. O espaço de estados de spin é dado pela base dos vetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$, que são vetores próprios de S_z, com os valores próprios $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, respetivamente. No instante $t = 0$, o estado do sistema é dado por:

$$|\psi(t = 0)\rangle = |+\rangle\ . \tag{1}$$

2.1. Se o observável S_x é medido no instante $t = 0$, quais são os resultados possíveis e as probabilidades respetivas?

2.2. Em vez de efectuar a medição da alínea anterior, permita que o sistema evolua sob a influência de um campo magnético paralelo a Oy, de módulo B_0. Calcule, na base $\{|+\rangle\, ,\ |-\rangle\}$, o estado do sistema no instante t.

2.3. Neste instante t, medimos os observáveis S_x,S_y e S_z. Quais são os valores possíveis e as probabilidades respetivas? Qual é a relação existente entre B_0 e t, de modo que o resultado de uma das medições seja certa?

(*vide* **CT, complemento** J_{IV}**, Ex. 1, pág. 476**)

3. Considere uma partícula de spin 1/2, utilizando a notação da questão anterior.

3.1. No instante $t = 0$, efectua-se uma medição de S_y, e obtém-se o resultado $+\hbar/2$. Qual é o vetor $\mid \psi(0)\rangle$ imediatamente após a medição?

3.2. Imediatamente após esta medição, aplica-se um campo magnético uniforme e depedente do tempo, paralelo a Oz. O operador Hamiltoniano do spin, i.e., $H(t)$, é dado por

$$H(t) = \omega_0(t)\ S_z\,. \tag{2}$$

Assuma que $\omega_0(t)$ é nulo, para $t < 0$ e para $t > T$, e que aumenta linearmente de 0 para ω_0 no intervalo $0 \leq t \leq T$ (Note que T é um parâmetro, com dimensões de um tempo). Demonstre que, no instante t, o vetor de estado é dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathbf{e}^{i\theta(t)}\,|+\rangle + i\mathbf{e}^{-i\theta(t)}\,|-\rangle\right]\,. \tag{3}$$

Determine a função $\theta(t)$.

3.3. No instante $t = \tau > T$, faz-se uma medição de S_y. Quais são os resultados possíveis, e as probabilidades respetivas? Determine a relação existente entre ω_0 e T, de modo a obter um resultado certo.

(*vide* **CT, complemento J_{IV}, Ex. 2, pág. 476**)

4. Considere uma partícula de spin 1/2, colocada num campo magnético $\mathbf{B_0}$, com as seguintes componentes

$$B_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,B_0, \qquad B_y = 0, \qquad B_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\,B_0\,. \tag{4}$$

Utilize a mesma notação do exercício 1.

4.1. Determine a matriz que representa, na base $\{|+\rangle\,,\ |-\rangle\}$, o operador H, o Hamiltoniano do sistema.

4.2. Calcule os valores próprios e os vetores próprios de H.

4.3. Considere que o sistema no instante $t = 0$ encontra-se no estado $|-\rangle$. Quais os valores da energia, e as probabilidades respetivas?

4.4. Determine o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ no instante t. Neste instante, efectua-se uma medição de S_x. Qual o valor médio dos resultados obtidos?

(*vide* **CT, complemento J_{IV}, Ex. 3, pág. 476-477**)

5. Considere uma partícula de spin 1/2, com um momento magnético $\mathbf{M} = \gamma \mathbf{S}$, colocada num campo magnético $\mathbf{B_0}$. Este último tem as seguintes componentes: $B_x = -\omega_x/\gamma$, $B_y = -\omega_y/\gamma$ e $B_z = -\omega_z/\gamma$, tais que $\omega_0 = -\gamma|\mathbf{B_0}|$.

5.1. Demonstre que o operador de evolução desta partícula é dada por $U(t,0) = \mathbf{e}^{-iMt}$, em que M é o operador

$$M = \frac{1}{\hbar}\left[\omega_x S_x + \omega_y S_y + \omega_z S_z\right] = \frac{1}{2}\left[\omega_x \sigma_x + \omega_y \sigma_y + \omega_z \sigma_z\right] , \tag{5}$$

e em que σ_x, σ_y e σ_z são as matrizes de Pauli.

Determine M na forma matricial, na base $\{|+\rangle\,,\ |-\rangle\}$, ou seja, os vetores próprios de S_z. Demonstre a seguinte relação:

$$M^2 = \frac{1}{4}\left[\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right] = \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 . \tag{6}$$

5.2. Prove que o operador de evolução pode ser escrito da seguinte forma:

$$U(t,0) = \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - \frac{2i}{\omega_0}\, M \,\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) . \tag{7}$$

5.3. Considere um spin, que no instante $t = 0$, se encontra no estado $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$. Demonstre que a probabilidade de o encontrar no estado $|+\rangle$, no instante t, é:

$$\mathcal{P}_{++}(t) = \left|\langle +|\, U(t,0)\, |+\rangle\right|^2 , \tag{8}$$

e derive a relação

$$\mathcal{P}_{++}(t) = 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2}\, \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) . \tag{9}$$

(*vide* **CT, complemento J_{IV}, Ex. 5, pág. 478**)

6. Considere um sistema composto por dois spins de 1/2, $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$, e a base de quatro vetores $|\pm\,\pm\rangle$. O sistema, no instante $t = 0$, encontra-se no estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\,|{+}{+}\rangle + \frac{1}{2}\,|{+}{-}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{-}{-}\rangle . \tag{10}$$

6.1. No instante $t = 0$, efetua-se uma medição de S_{1z}. Qual a probabilidade de encontrar o valor $-\hbar/2$? Qual o vetor de estado após esta medição? De seguida, se medirmos S_{1x}, quais os resultados possíveis e as probabilidades respetivas? Responda às mesmas questões para uma medição inicial de S_{1z}, em que o resultado seja $+\hbar/2$.

6.2. Considere que o sistema se encontra no estado $|\psi(0)\rangle$, descrito pela Eq. (10). Efetuam-se medições simultâneas de S_{1z} e S_{2z}. Qual a probabilidade de encontrar resultados opostos? E resultados idênticos?

6.3. Em vez de efetuar as medições da questão anterior, deixemos que o sistema evolua sob a influência do Hamiltoniano:

$$H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z} \,. \tag{11}$$

Qual é o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$, no instante t?

(*vide* **CT, complemento J_{IV}, Ex. 6, pág. 478-479**)

7. Considere as seguintes matrizes, correspondentes ao momento angular de uma partícula de spin 1:

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \; L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.1. Demonstre que as matrizes acima indicadas obedecem às regras de comutação apropriadas e que têm os valores próprios correspondentes às três componentes do momento angular de uma partícula de spin 1:

7.2. Obtenha os vetores próprios das matrizes acima representadas. De seguida, determine as probabilidades dos possíveis resultados de uma medição de L_x, supondo que a partícula de spin 1 se encontra, inicialmente, num estado próprio de L_z, com valor próprio $\hbar$.

(*vide* **Rae, Exs. 6.6–6.7, pág. 133**)

8. Analise a separação espectral do estado $l = 2$ de um átomo, com um único electrão, devida aos seguintes efeitos: (i) acoplamento spin-órbita; (ii) efeito de Zeeman com um campo forte; (iii) efeito de Zeeman com um campo fraco.
(*vide* **Rae, Ex. 6.8, pág. 133**)

9. Considere o momento angular orbital e o operador correspondente, $\mathbf{L}$.

9.1. Os harmónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são funções próprias ortonormalizadas dos operadores $\mathbf{L}^2$ e L_z. Indique os valores próprios correspondentes.

9.2. Verifique explicitamente as propriedades da alínea anterior para o caso de L_z e para as três funções $Y_{lm}(\theta, \phi)$, $l = 1$, $m = -1, 0, 1$.

9.3. Os operadores de escada $L_+ = L_x + iL_y$, $L_- = L_x - iL_y$ verificam

$$
\begin{aligned}
L_+ \lvert l\ m\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\, \lvert l\ \ m+1\rangle && (12) \\
L_- \lvert l\ m\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\, \lvert l\ \ m-1\rangle && (13)
\end{aligned}
$$

Use esta propriedade para calcular o valor médio de L_x e de L_x^2 num estado $\lvert l\ m\rangle$.

9.4. Para $l = 1$, calcule a representação de L_x na base $\lvert l\ m\rangle$. Calcule também os valores próprios de L_x e os seus estados próprios na base $\lvert l\ m\rangle$.

9.5. Considere um feixe de partículas sem spin e com momento angular orbital correspondente a $l = 1$. O feixe está dirigido segundo a direção y, e atravessa um dispositivo de Stern-Gerlach com campo magnético médio dirigido segundo o eixo x, que o divide em três feixes aproximadamente coplanares. Um dos feixes exteriores atravessa por sua vez um outro dispositivo de Stern-Gerlach, agora com campo magnético médio dirigido segundo o eixo z. Quantos feixes emergem do segundo dispositivo, e qual é a sua intensidade relativa? Responda às mesmas perguntas supondo agora que é o feixe central que atravessa o segundo dispositivo.

10. Seja $\vec{J}$ um operador de momento angular e J_+ o operador de escada associado. Mostre que:

10.1. $J_+ \lvert kjj\rangle = 0$.

10.2. Se $m < j$, $J_+ \lvert kjm\rangle$ é um vector próprio de $\vec{J}^2$ associado ao valor próprio $\hbar^2 j(j+1)$ e um vector próprio de J_z associado ao valor próprio $\hbar(m+1)$.