# Mecânica Quântica

**6ª Série**

**1.** Prove as seguintes relações:

- $[a, a^+] = 1$;
- $[N, a] = -a$;
- $[N, a^+] = a^+$.

**2. Lemas.**

2.1. *Lema 1 (Propriedades dos valores próprios de $N$).* Demonstre que os valores próprios, $\nu$, do operador $N$, são positivos ou nulos.

2.2. *Lema 2 (Propriedades do vetor $a|\varphi_\nu^i >$).* Seja $|\varphi_\nu^i >$ um vetor próprio (não nulo) de $N$, com um valor próprio $\nu$. Prove que:

- se $\nu = 0$, logo o ket $a|\varphi_{\nu=0}^i >$ é nulo;
- se $\nu > 0$, logo o ket $a|\varphi_\nu^i >$ é um vector próprio não-nulo de $N$, com um valor próprio $\nu - 1$.

2.3. *Lema 3 (Propriedades do vetor $a^+|\varphi_\nu^i >$).* Seja $|\varphi_\nu^i >$ um vetor próprio (não nulo) de $N$, com um valor próprio $\nu$. Prove que:

- $a^+|\varphi_\nu^i >$ é sempre não nulo;
- $a^+|\varphi_\nu^i >$ é um vetor próprio de $N$, com um valor próprio $\nu + 1$.

**3.** Demonstre que o estado fundamental $E_0 = \hbar\omega/2$ do oscilador harmónico simples é *não-degenerado* (Sugestão: Note que os estados próprios do Hamiltoniano $H$ associados ao valor próprio $E_0 = \hbar\omega/2$, i.e., os estados próprios de $N$ associados ao valor próprio $n = 0$, satisfazem a equação $a|\varphi_0^i >= 0$).

**4. Estados próprios do Hamiltoniano.**

4.1. Demonstre que um estado próprio arbitrário $|\varphi_n >$ pode ser obtido em função do estado fundamental, pela seguinte relação $|\varphi_n >= \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|\varphi_0 >$.

4.2. Demonstre as seguintes relações:

$$a^+ \, |\varphi_n >= \sqrt{n+1} \, |\varphi_{n+1} > , \tag{1}$$

$$a \, |\varphi_n >= \sqrt{n} \, |\varphi_{n-1} > \; . \tag{2}$$

4.3. Prove as seguintes relações:

$$X|\varphi_n >= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[ \sqrt{n+1} \, |\varphi_{n+1} > + \sqrt{n} \, |\varphi_{n-1} > \right] , \tag{3}$$

$$P|\varphi_n >= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left[ \sqrt{n+1} \, |\varphi_{n+1} > - \sqrt{n} \, |\varphi_{n-1} > \right] . \tag{4}$$

4.4. Encontre as expressões para os elementos de matriz de $< \varphi_{n'} | \, \hat{Q} \, |\varphi_n >$, para os seguintes operadores $\hat{Q}$: (i) $a$; (ii) $a^+$; (iii) $X$; e (iv) $P$.

**5. Funções de onda associadas aos estados estacionários.**

Considere a representação $\{|x>\}$, em que as funções $\varphi_n(x) =< x \,|\, \varphi_n >$ representam os estados próprios do Hamiltoniano. Prove que $\varphi_n(x)$ é dada pela seguinte relação:

$$\varphi_n(x) = \left[ \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right)^n \right]^{1/2} \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left[ \frac{m\omega}{\hbar} \, x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right]^n e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2} . \tag{5}$$

Determine as expressões para as duas primeiras funções de $\varphi_n(x)$, i.e, $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$.