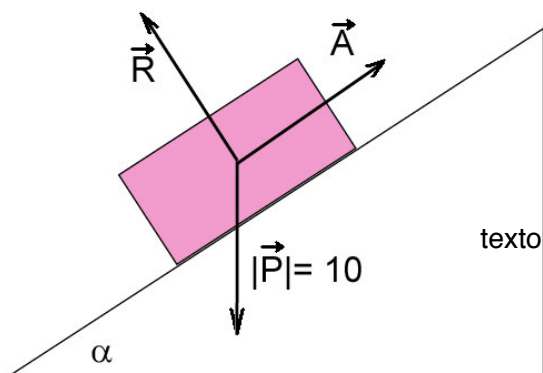


**ELEMENTOS DE FÍSICA**  
**LICENCIATURA EM GEOLOGIA**  
 2019-2020

1ª Série de Problemas - Operações sobre vectores

1. O vector  $\vec{A}$  tem magnitude 100 e orientação N20E. O vector  $\vec{B}$  tem magnitude 50 e orientação N135W.

- a) Determine as componentes de cada um dos vectores segundo as direcções X (oeste-este) e Y (sul-norte);
- b) Determine as componentes do vector soma  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ;
- c) Calcule o comprimento e a orientação do vector soma.



2. Considere os vectores representados na figura ao lado ( $\alpha = 30^\circ$ ). Determine os comprimentos dos vectores  $\vec{R}$  e  $\vec{A}$  de modo a que a soma dos 3 vectores seja nula,  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{A} = \vec{0}$ . Sugestão: faça a decomposição dos vectores segundo um sistema de eixos adequado.

3. Dados os vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  cujas projecções sobre um sistema de eixos ortogonais são respectivamente,

$$a_x = 5 \quad , \quad a_y = 4 \quad , \quad a_z = -3$$

$$b_x = 3 \quad , \quad b_y = -4 \quad , \quad b_z = 5$$

determine:

a)  $6\vec{a} - 3\vec{b}$

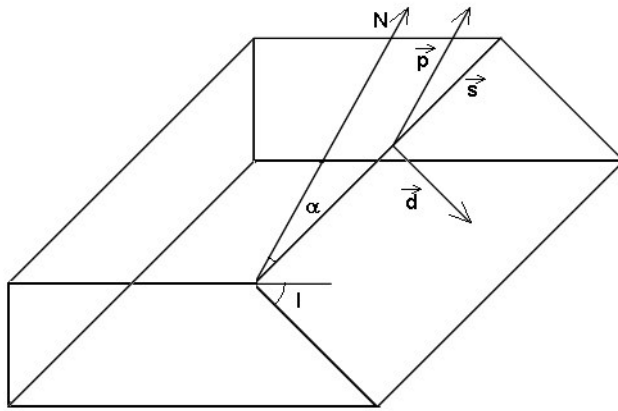
b)  $a^2 + b^2$

c) O ângulo entre  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$

4 - Considere as coordenadas aproximadas de Lisboa (39°N, 9°W) e Adelaide (35°S, 138°E). Use para o raio da Terra o valor  $R_T = 6400 \text{ km}$

- a) Determine as coordenadas cartesianas de cada uma das cidades.
- b) Calcule a distância, em linha recta, entre as duas cidades.
- c) Calcule a distância angular entre as duas cidades (ângulo entre ambos os vectores posição).
- d) Calcule a distância, medida à superfície do Globo, entre as duas cidades.

5 A estria de uma falha tem a direcção N30°E e está inclinada 20° em relação à horizontal. Determine as componentes do vector unitário definido pela estria segundo um sistema de eixos em que  $X \equiv E$ ,  $Y \equiv N$  e  $Z$  é a direcção vertical, positiva para cima.



6 Considere o plano de falha definido na figura ao lado. A sua orientação (azimute) é medida pelo ângulo que a intersecção com a horizontal faz com o Norte (vector  $\vec{s}$  na figura). A inclinação do plano (I na figura) é também a inclinação da linha de maior declive do plano (vector  $\vec{d}$  na figura). O pólo do plano é definido pela direcção do vector perpendicular ao plano

( $\vec{p}$  na figura). Sabendo que o plano tem uma orientação N60°E e inclina 30° para SE, determine as componentes cartesianas dos 3 vectores (unitários) definidos na figura,  $\vec{s}$ ,  $\vec{d}$ ,  $\vec{p}$ . Use o mesmo sistema de eixos do problema anterior.

7. Dados os vectores  $\vec{\omega} = 3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y - 5\vec{u}_z$  e  $\vec{r} = -\vec{u}_x + \vec{u}_y + 2\vec{u}_z$  calcule as componentes do vector  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

8. Considere o vector  $\vec{r} = R(\cos \omega t \vec{u}_x + \sin \omega t \vec{u}_y)$  variável com o tempo  $t$  e onde R e  $\omega$  são constantes.

a) Verifique que  $\vec{r}(t) = \vec{r}(t + T)$  em que  $T = 2\pi/\omega$ , isto é,  $\vec{r}$  é uma função periódica de período T (repete o seu valor ao fim do tempo T).

b) Verifique que o módulo de  $\vec{r}$  é constante, isto é, não depende de t.

c) Obtenha a expressão do vector  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ . Verifique que as direcções dos vectores  $\vec{r}$  e

$\frac{d\vec{r}}{dt}$  são perpendiculares.

9. Considere o vector  $\vec{r} = (t^2 + t)\vec{u}_x + (3t - 2)\vec{u}_y + (2t^3 - 4t^2)\vec{u}_z$ . Determine as componentes dos vectores  $\vec{r}$  e  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  para  $t = 2$ .

## FORMULÁRIO - Operações sobre vectores

Dados os vectores  $\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$  e  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  tem-se:

comprimento  $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

produto por um escalar  $k$   $k\vec{a} = (k a_x, k a_y, k a_z)$

versor  $\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \left( \frac{a_x}{a}, \frac{a_y}{a}, \frac{a_z}{a} \right)$

soma e diferença  $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

distância  $\Delta(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b} - \vec{a}|$

produto interno  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

ângulo entre vectores  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

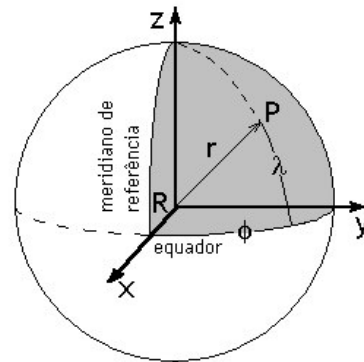
produto externo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{u}_x (a_y b_z - a_z b_y) - \hat{u}_y (a_x b_z - a_z b_x) + \hat{u}_z (a_x b_y - a_y b_x)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

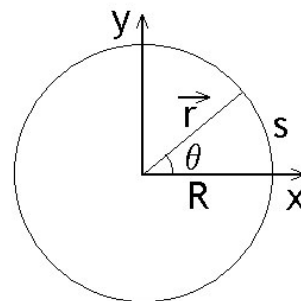
**Coordenadas esféricas**  $(R, \lambda, \varphi)$  e transformação em coordenadas cartesianas  $(r_x, r_y, r_z)$ :

$$\begin{cases} r_x = R \cos \lambda \cos \varphi \\ r_y = R \cos \lambda \sin \varphi \\ r_z = R \sin \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} R = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \\ \lambda = \sin^{-1} \frac{r_z}{R} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{r_y}{r_x} \end{cases}$$



**Coordenadas polares**  $(R, \theta)$  e transformação em coordenadas cartesianas  $(x, y)$

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$



**Comprimento do arco**

$$s = R \theta$$

**Derivação**

$$\vec{a} = \vec{a}(t) : \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \hat{u}_x + \frac{da_y}{dt} \hat{u}_y + \frac{da_z}{dt} \hat{u}_z$$