

A Teoria da Relatividade e o "Global Positioning System" (GPS)

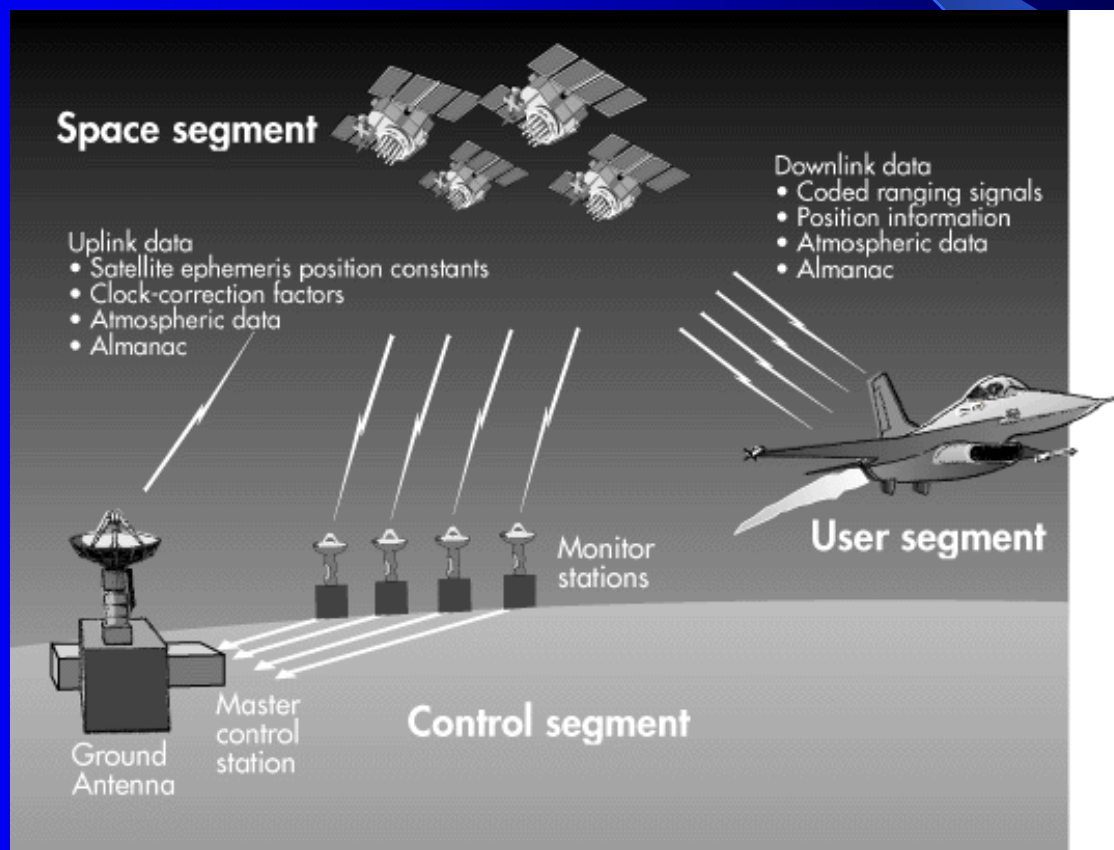
Seminário realizado no CAAUL

Paulo Crawford

7 de Março de 2001

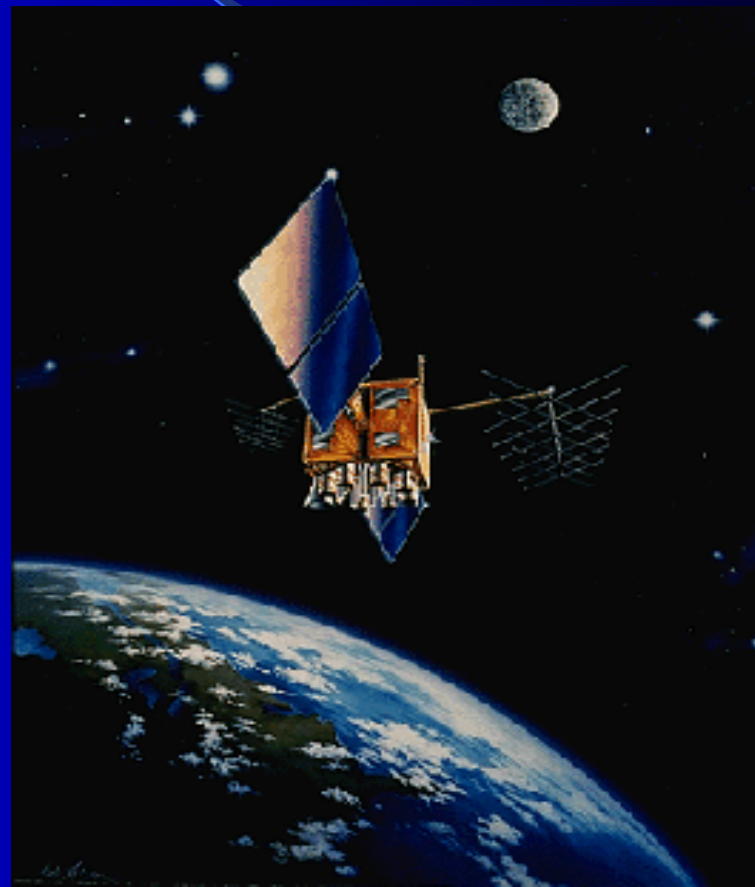
Descrição do GPS-1

- O GPS pode ser descrito em termos de 3 “segmentos”: o segmento espacial, o segmento de controlo e o segmento do utilizador.



Segmento Espacial

- É constituído por 24 satélites com relógios atómicos, com órbitas circulares em torno da Terra com um período orbital de 12 h, distribuídos em 6 planos orbitais igualmente inclinados.



Constelação GPS



Delta-II



GPS Block I



GPS Block II

Segmento de controlo e Segmento do utilizador

- O controlo é constituído por um conjunto de estações terrestres que recebem continuamente informação dos satélites. Os dados são depois enviados para uma Estação de Controlo em Colorado Springs que analisa a constelação e projecta as efemérides e comportamento dos relógios para as horas seguintes ...



Mais de 9000 receptores GPS foram usados na operação Desert Storm na I guerra do Golfo.

Funcionamento do GPS-1

- A finalidade do GPS é determinar a posição de um objecto à superfície da Terra em 3 dimensões: longitude, latitude e altitude.
- Sinais provenientes de 3 satélites fornecem esta informação. Cada satélite envia um sinal codificado com a localização do satélite e o tempo de emissão do sinal. O relógio do receptor regista o instante da recepção de cada sinal, depois subtrai o tempo de emissão para determinar o lapso de tempo e portanto a distância viajada pelo sinal.

Funcionamento do GPS-2

- Assim, são construídas 3 esferas a partir destas distâncias, uma esfera centrada em cada satélite. O objecto está localizado no único ponto de intersecção das 3 esferas.
- Uma dificuldade: o relógio do receptor não é tão preciso como os relógios atómicos dos satélites. Por isso, um sinal de um 4º satélite é utilizado para averiguar da precisão do relógio do receptor. Este 4º sinal permite ao receptor processar os sinais GPS com a precisão de um relógio atómico.

Funcionamento do GPS-3

- Dificuldades a superar: os sinais trocados entre relógios a diferentes altitudes estão sujeitos aos efeitos da Relatividade Geral; por outro lado, o movimento do satélite e a rotação da Terra devem ser tomados em conta.
- Sem a consideração destes efeitos o GPS seria inútil.

Relógios Estacionários

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - r^2 d\varphi^2$$

$$\mathcal{G} = \pi/2,$$

$$dr = 0$$

Geometria de Schwarzschild
para um campo estático com
simetria esférica.

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - v^2$$

Relógios a diferente altura

$$d\tau_{sat} \rightarrow dt, \quad d\tau_{Terra} \rightarrow dt$$

$$M = \frac{mG}{c^2}, \quad [M] = L$$

$$v = r d\varphi / dt = 0$$

$$\left(\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{Terra}} \right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_{sat}} \right) - v_{sat}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_{Terra}} \right) - v_{Terra}^2}$$

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{Terra}} \approx \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_{sat}} \right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2M}{r_{Terra}} \right)^{1/2}} = \left(1 - \frac{2M}{r_{sat}} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r_{Terra}} \right)^{-1/2}$$

Fórmula para a diferença entre relógios a diferente altura

$$(1+d)^n \approx 1+nd, \text{ com } |d| \ll 1 \text{ e } |nd| \ll 1$$

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{Terra}} \approx \left(1 - \frac{M}{r_{sat}}\right) \left(1 - \frac{M}{r_{Terra}}\right) \approx 1 - \frac{M}{r_{sat}} + \frac{M}{r_{Terra}} - \frac{M}{r_{sat}} \frac{M}{r_{Terra}}$$

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{Terra}} \approx 1 - \frac{M}{r_{sat}} + \frac{M}{r_{Terra}} = 1 + b$$

Será a diferença entre os 2 relógios desprezável?

Discrepância na sincronização

- Num dia há 86 400 segundos. Os relógios da Terra atrasam-se cerca de **50 000 ns** por dia devido a esta diferença de altitude, e como *1ns-luz \cong 30 cm*
- Isto origina um erro de localização de cerca de **15 km por dia!!** A RG é pois necessária para corrigir este erro.

Efeitos devidos ao movimento de acordo com a RG

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - v^2, \quad d\tau = dt\sqrt{1 - 2M/r - v^2}$$

$$v = r \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\left(\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{Terra}}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_{sat}}\right) - v_{sat}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_{Terra}}\right) - v_{Terra}^2}$$

Cálculo da velocidade do relógio no equador

$$\frac{GM_{kg} m}{r_{sat}^2} = \frac{mv_{conv}^2}{r_{sat}}$$

Unidades
Convencionais

$$v_{conv} = \frac{2\pi r_{sat}}{T_{sec}}$$

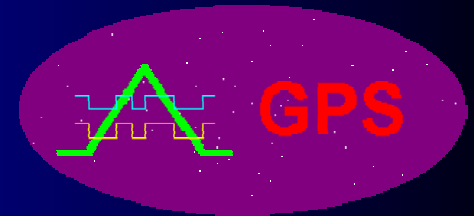
$$(1+d)^n \approx 1+nd, \text{ com } d = 1 - \frac{2M}{r_{sat}} - v_{sat}^2$$

Relação entre o tempo na Terra e no satélite

$$(1+d)^n \approx 1+nd, \text{ com } d = 1 - \frac{2M}{r_{Terra}} - v_{Terra}^2$$

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{Terra}} \approx 1 - \frac{M}{r_{sat}} - \frac{v_{sat}^2}{2} + \frac{M}{r_{Terra}} + \frac{v_{Terra}^2}{2}$$

Corresponde a um atraso de 39 000 ns por dia!



Conclusão

- A RG prevê que ambos os efeitos: altitudes relativas e velocidades relativas dos relógios da Terra e do satélite afectam os ritmos dos relógios, sendo por isso imprescindível recorrer aos cálculos da RG para cancelar esses erros e obter medidas precisas.