

# GRAVITAÇÃO, INÉRCIA E O PARADOXO DA FORÇA CENTRÍFUGA \*

ISMAEL TERENO <sup>1</sup> e PAULO CRAWFORD <sup>2</sup>

Departamento de Física e Centro de Física Nuclear da UL  
Av. Prof. Gama Pinto, 2, 1699 Lisboa

**Num buraco negro esfericamente simétrico e sem carga, a órbita circular  $r = 3MG/c^2$  tem propriedades surpreendentes. Os fótons movem-se livremente nessa órbita dando origem a um raio luminoso em torno do buraco. Além disso, duas naves espaciais podem mover-se nessa órbita com diferentes velocidades mas com a mesma aceleração radial. Porém, o mais surpreendente é que para raios menores ( $r < 3MG/c^2$ ), a atracção exercida sobre um corpo que se mova numa dada órbita circular aumenta com a velocidade. Este fenómeno contra intuitivo, conhecido há já algum tempo como o “efeito de Abramowicz”, não tem uma interpretação física consensual. Neste artigo são discutidas três interpretações alternativas e mostra-se que uma delas implica uma nova definição de inércia. Só esta última, já apresentada nesta revista, procura explicar o paradoxo em termos de uma anomalia da força centrífuga nessa região.**

## Introdução

A uma distância crítica de um buraco negro, quanto mais rapidamente uma partícula se move numa órbita circular, maior é a atracção exercida por este sobre a partícula.

Há vários anos que este fenómeno é conhecido como “efeito de Abramowicz” e explicado em termos de um mecanismo não-newtoniano: a força centrífuga inverte o seu sentido no interior da rotoesfera, uma região que se situa dentro de uma distância (coordenada) igual a 1,5 vezes o raio de um buraco negro esfericamente simétrico; isto é, quando a coordenada radial é  $r < 3MG/c^2$ . Segundo Marek Abramowicz e seus colaboradores, nesta região a força centrífuga, em vez de ser uma força repulsiva que atira os objectos para fora, torna-se uma força de atracção que puxa o material para o interior do buraco negro.

Porém, estamos longe de ter chegado a um consenso sobre a melhor interpretação física para este fenómeno contra-intuitivo. E a primeira dificuldade decorre naturalmente de não existir um

conceito de força centrífuga na teoria da Relatividade Geral (RG). Aliás, no âmbito desta teoria, o conceito de força gravítica é substituído pelo de curvatura do espaço-tempo. Torna-se assim necessário implementar uma separação do espaço-tempo em espaço e tempo de modo a reencontrar, no espaço tri-dimensional, uma expressão que se assemelhe à expressão newtoniana de força centrífuga. Veremos que este processo não é isento de ambiguidade e, por isso, neste artigo são apresentadas três interpretações alternativas. Mostraremos ainda que a primeira interpretação deste fenómeno, também conhecido como o paradoxo da força centrífuga, e já apresentado nesta revista [1], implica uma nova definição de inércia.

## Definição de Inércia

A inércia é uma característica de todos os corpos, que pode ser definida

\* Trabalho parcialmente financiado pelo programa PRAXIS XXI BM4488/94 da J.N.I.C.T. e pelo projecto CERN/P/FIS/1096/96.

<sup>1</sup> ismael@cosmo.cii.fc.ul.pt

<sup>2</sup> crawford@cosmo.cii.fc.ul.pt

Buraco negro

Espaço-tempo curvo

Geodésica

Forças inerciais

como uma resistência à aceleração. Quando a velocidade de um corpo varia em valor absoluto, ou quando este se move numa trajectória não rectilínea, surgem os efeitos de inércia sob a forma de forças (fictícias) actuantes sobre o corpo.

Segundo as ideias do físico e filósofo Mach (1836-1916), que muito influenciaram Einstein na construção da teoria da RG, a inércia de um corpo tem origem numa interacção (não especificada) entre o corpo e todas as outras massas do Universo.

A influência preponderante é a dos corpos distantes, historicamente denominados estrelas fixas, pois é a distâncias cosmológicas que se encontra a maior parte da matéria. Experimentalmente não se conseguiu determinar a influência de massas locais, como a Terra e o Sol, nos efeitos de inércia. Consequentemente não se espera que estes variem de ponto para ponto.

Um referencial no qual não existam efeitos de inércia, um referencial inercial, está num estado de movimento privilegiado em relação às estrelas fixas. Portanto são estas, através das suas massas, distribuição e movimento, que determinam o referencial inercial. Esta é a essência do princípio de Mach.

Recentemente foi proposto [2] que os efeitos de inércia surgem quando um corpo se move numa trajectória diferente da descrita pela luz no espaço.

Num espaço plano esta proposição não se distingue da habitual pois aí a luz descreve trajectórias rectilíneas. Porém, na presença de grandes massas e no quadro da RG, onde a intensidade do campo gravítico é dada pela curvatura do espaço-tempo, as trajectórias luminosas poderão ser fortemente encurvadas.

Vejamos agora como surgiu esta nova ideia de inércia. Seja dada uma família de observadores num espaço-tempo 4-dimensional  $M$ . Os seus 4-vectores velocidade,  $u^a$ ,  $a = 0, 1, 2, 3$ , que são os vectores em  $M$  tangentes às linhas do Universo desses observadores, permitem uma partição em tempo e espaço:  $M = R \times \Sigma$  (o termo técnico é "foliação"). Esta foliação traduz-se na seguinte decomposição da métrica:

$$g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab}$$

o que permite escrever o elemento de linha na forma

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = -(u_a dx^a)^2 + h_{ab} dx^a dx^b = -d\tau^2 + d\ell^2$$

Na fórmula anterior utiliza-se a convenção de Einstein de soma nos índices repetidos. O espaço  $\Sigma$  é uma hiper-superfície de 3 dimensões, o espaço de repouso do observador com 4-velocidade  $u^a$ , no qual todos os acontecimentos (pontos do espaço-tempo) têm o mesmo valor da coordenada temporal, e é caracterizado pela métrica  $h_{ab}$ . Note-se que  $h_{ab}$  tem ainda a propriedade de projectar qualquer 4-vector no espaço tan-

gente à hipersuperfície  $\Sigma$  e, em particular,  $h_{ab} u^b = 0$ . Este espaço 3-dimensional, tal como o espaço-tempo, pode ser curvo. A recta real  $R$  representa aqui a direcção temporal e, portanto, a direcção definida pelos 4-vectores velocidade  $u^a$ .

As trajectórias espaciais, descritas pelos corpos, são as projecções, sobre o espaço  $\Sigma$  das correspondentes linhas do Universo. Em geral, a projecção de uma geodésica de  $M$  não é uma geodésica de  $\Sigma$ . Mas há várias maneiras de fazer a partição do espaço-tempo. Em particular é possível fazê-la de modo que as geodésicas de  $\Sigma$ , sejam a projecção das trajectórias luminosas em  $M$ , sobre  $\Sigma$ . De um espaço com esta propriedade diz-se que tem uma geometria de referência óptica.

Dado um campo gravítico independente do tempo, representado por um espaço-tempo curvo estático, consideremos as linhas do Universo dos observadores (fixos) que descrevem trajectórias de espaço-tempo tangentes à direcção temporal de simetria.

Suponha-se que um observador (fixo) mede o 4-vector aceleração de um corpo em movimento. A grandeza física aceleração, que é um 3-vector, é calculada a partir da projecção deste 4-vector,  $a^c$ , sobre o espaço de repouso do observador. Cada observador pode fazer a sua partição do espaço-tempo, usando o seu tempo próprio, como se explicou atrás. Posteriormente, o 3-vector aceleração, obtido por projecção no espaço associado ao observador, pode ser decomposto numa soma de várias parcelas.

Suponha-se que se faz esta decomposição de maneira que uma das parcelas seja exactamente igual ao termo da aceleração gravítica, tal como é conhecido da teoria newtoniana. Nestas condições, sobra sempre uma outra parcela que se verifica que é proporcional ao desvio da geodésica de um espaço com geometria de referência óptica. Esta última é interpretada como a componente inercial.

Conclui-se assim que a parte inercial se anula quando a trajectória espacial do corpo é idêntica à geodésica desse espaço, ou seja, quando coincide com a trajectória da luz.

Refira-se ainda que, embora se tenha considerado um espaço-tempo estacionário, é possível estender este resultado a um espaço-tempo arbitrário.

## Órbitas Circulares num Campo Estático

A partir de agora passa-se a considerar uma situação específica, de modo a analisar, através de um exemplo, o resultado referido.

Considera-se uma nave em órbita circular, no vácuo, em torno de um buraco negro estático e esfericamente simétrico de massa  $m$  e sem carga. Calcula-se a sua aceleração, medida por um observador em repouso em relação à massa que cria o campo gravítico.

A geometria do espaço-tempo existente nessa região é definida pela solução das equações de Einstein da RG obtida por Karl Schwarzschild em 1916, menos de dois meses após a publicação desta teoria. Analiticamente esta geometria é caracterizada pela seguinte métrica (em coordenadas esféricas),

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2mG}{rc^2}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2mG}{rc^2}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \quad (1)$$

A nave, em órbita circular plana, mantém constantes as suas coordenadas  $r$  e  $\theta$  e, portanto, o seu deslocamento infinitesimal espaço-temporal (admitindo  $\theta = \pi/2$ , o que não reduz a generalidade do problema, dada a sua simetria esférica) escreve-se,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2)$$

Note que, a partir daqui, se passam a usar as unidades geometrizadas. Isto é, faz-se  $G = c = 1$ , o que deixa distâncias, tempos e massas, todos com a mesma dimensão.

O 4-vector velocidade da nave é definido como a derivada do 4-vector deslocamento em ordem ao tempo medido pelo viajante (o tempo próprio,  $\tau$ ). As suas componentes são,

$$u^a = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, \frac{d\phi}{d\tau}\right) = (i, 0, 0, \Omega i)$$

onde  $\Omega = d\phi/dt$  é a velocidade angular da nave medida por observadores no infinito.

Como  $d\tau = -ds^2$ , este 4-vector tem norma

$$g_{ab} u^a u^b = g_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} = u^t u_t + u^\phi u_\phi = -1$$

Assim as duas componentes não nulas de  $u^a$  não são independentes e da condição de normalização do 4-vector velocidade resulta

$$i^2 = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r} - \Omega^2 r^2} \quad (3)$$

Num espaço-tempo curvo, o 4-vector aceleração é calculado a partir da derivada dirigida (covariante) do 4-vector velocidade  $u^a$  segundo o próprio  $u^a$ , ou seja,

$$a^c = \frac{d^2 x^c}{d\tau^2} + \Gamma^c_{bd} \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^d}{d\tau}$$

Substituindo as conexões ( $\Gamma^a_{bc}$ ) pelas suas expressões na solução de Schwarzschild e considerando um movimento com  $\Omega = \text{constante}$  obtém-se,

$$a^r = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{m}{r^2} - \Omega^2 r\right) i^2 \quad (4)$$

só a componente radial é diferente de zero.

Como a métrica é estática, o eixo dos tempos é ortogonal à hipersuperfície espacial  $\Sigma(r, \vartheta, \varphi)$ , que é o espaço associado a um observador em repouso em relação à massa (ou seja com  $r, \vartheta, \varphi$  constantes). Então o 4-vector aceleração tem projecção sobre  $S$  idêntica à sua parte espacial:

$$\vec{a} = (a^r, 0, 0)$$

A trajectória helicoidal, descrita no espaço-tempo, projecta-se em  $\Sigma$  na órbita circular descrita pela nave.

Note-se que o 3-vector,  $\vec{a}$ , não tem o mesmo significado do vector aceleração medido no referencial em repouso na teoria de Newton. Este, coincide com a aceleração gravitacional  $a_G(r)$  sentida no raio  $r$  da órbita e é diferente do vector aceleração medido no referencial da nave, que é  $\vec{a}_G + \vec{a}_C$  (gravitacional + centrífuga).

Pelo contrário, a norma da 4-aceleração é um invariante que mede o desvio à geodésica. O quadrado da norma,  $a^c a_c$ , identifica-se com o quadrado do 3-vector aceleração,  $\vec{a}^2$ , num só referencial: o referencial próprio (neste caso o referencial da nave). Assim, cálculos feitos no referencial em repouso, permitem obter informação sobre as contribuições inerciais.

Observem-se agora as figuras 1 a 3. Representam, utilizando (4), o quadrado da aceleração total, da nave que percorre a órbita de raio coordenado  $r$  com  $\Omega$  constante, em função desse  $\Omega$ .

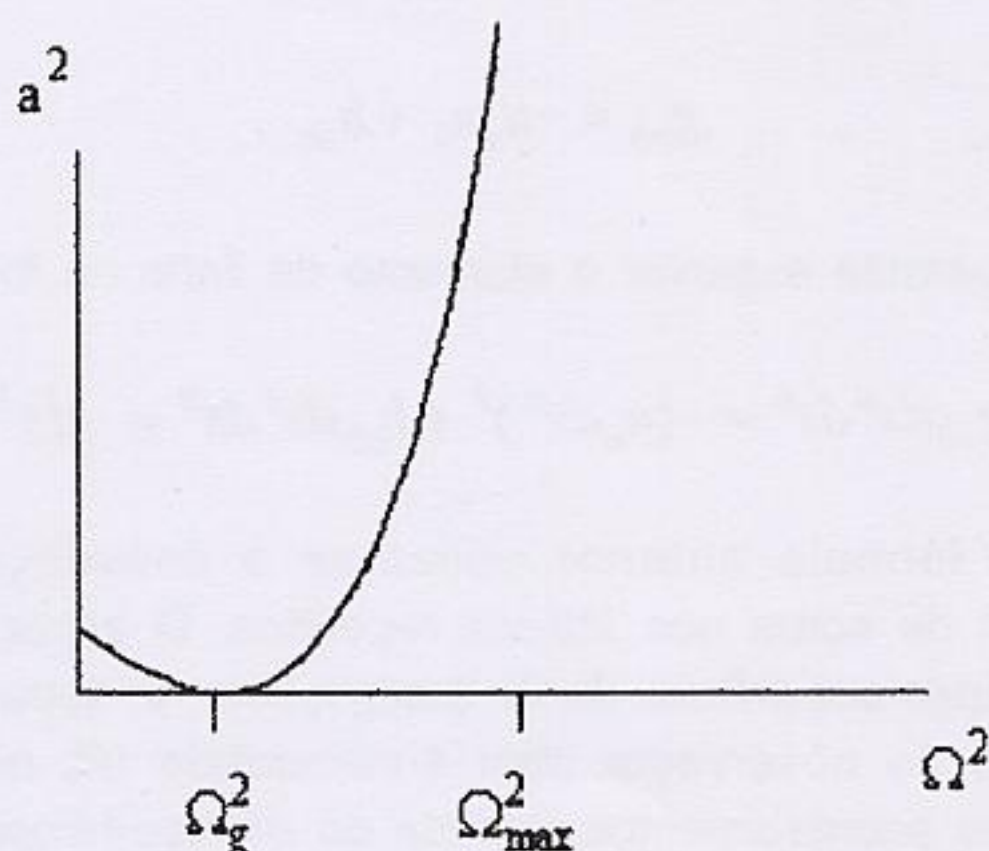


Fig. 1 —  $a^2(\Omega^2)$  para o caso  $r > 3m$ .

Distinguem-se três situações; respectivamente, órbitas com  $r > 3m$ ,  $r = 3m$  e  $2m < r < 3m$ . No eixo das abcissas evidenciam-se dois valores de  $\Omega$ :  $\Omega_g$  e  $\Omega_{\max}$ .  $\Omega_g$  é o valor da velocidade angular da nave que, em cada situação, lhe permite viajar livremente, sem a ajuda de motores, não sofrendo aceleração. Ou seja, é o valor de  $\Omega$  que a nave tem de ter para descrever uma geodésica. De acordo com (4) é dado por

$$\Omega_g^2 = \frac{m}{r^3}$$

$\Omega_{\max}$  é o limite superior da velocidade angular da nave, isto é,

$$\Omega_{\max}^2 = \Omega^2(v=1) = \frac{r-2m}{r^3}$$

Esta expressão é facilmente obtida, a partir das fórmulas até agora apresentadas. Para isso recorde-se que, na RR, quando a velocidade de um corpo se aproxima da velocidade da luz, a razão entre o seu tempo próprio e o tempo coordenado tende para zero. Então,  $\Omega_{\max}$  é calculado a partir do anulamento do denominador de (3).

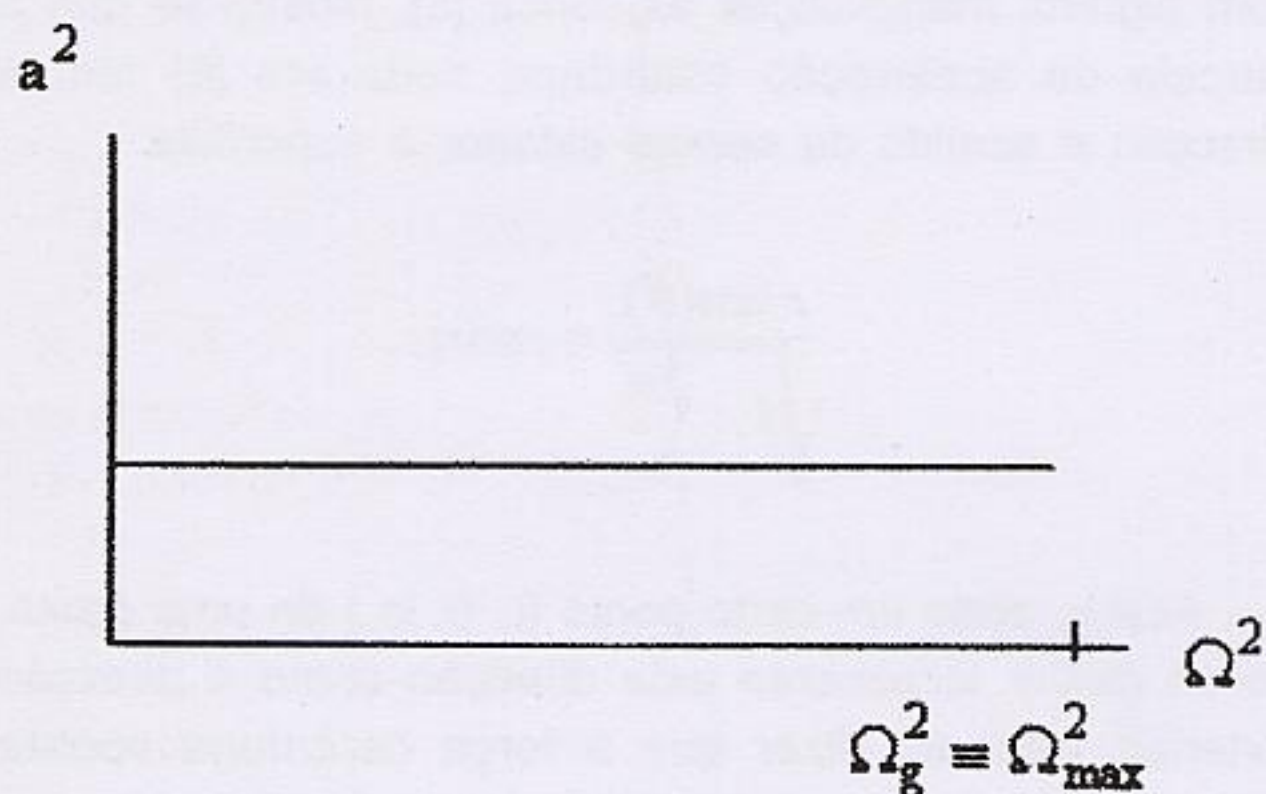


Fig. 2 —  $a^2(\Omega^2)$  para o caso  $r > 3m$ . Aqui  $\Omega_g$  e  $\Omega_{\max}$  coincidem.

Nestas condições a aceleração é infinita, pois a nave, um corpo material, não pode atingir a velocidade da luz ( $v = 1$ ).

As principais propriedades da aceleração da nave numa órbita circular, patentes nas figuras, são as seguintes:

- Na região  $r > 3m$ , com o aumento da velocidade a atracção diminui. É o que se espera intuitivamente do conhecimento das órbitas em teoria Newtoniana.
- Em  $r = 3m$ , a aceleração não varia com a velocidade; isto é, objectos com diferentes velocidades têm a mesma aceleração.
- Na região entre  $2m$  e  $3m$ , com o aumento da velocidade aumenta a atracção.

Nas próximas secções veremos como interpretar estes novos efeitos. Para isso utiliza-se um método que consiste, primeiro, em decompor a aceleração em várias parcelas, às quais se tenta atribuir significado físico; e, depois, em analisar os efeitos a partir do balanço entre essas parcelas.

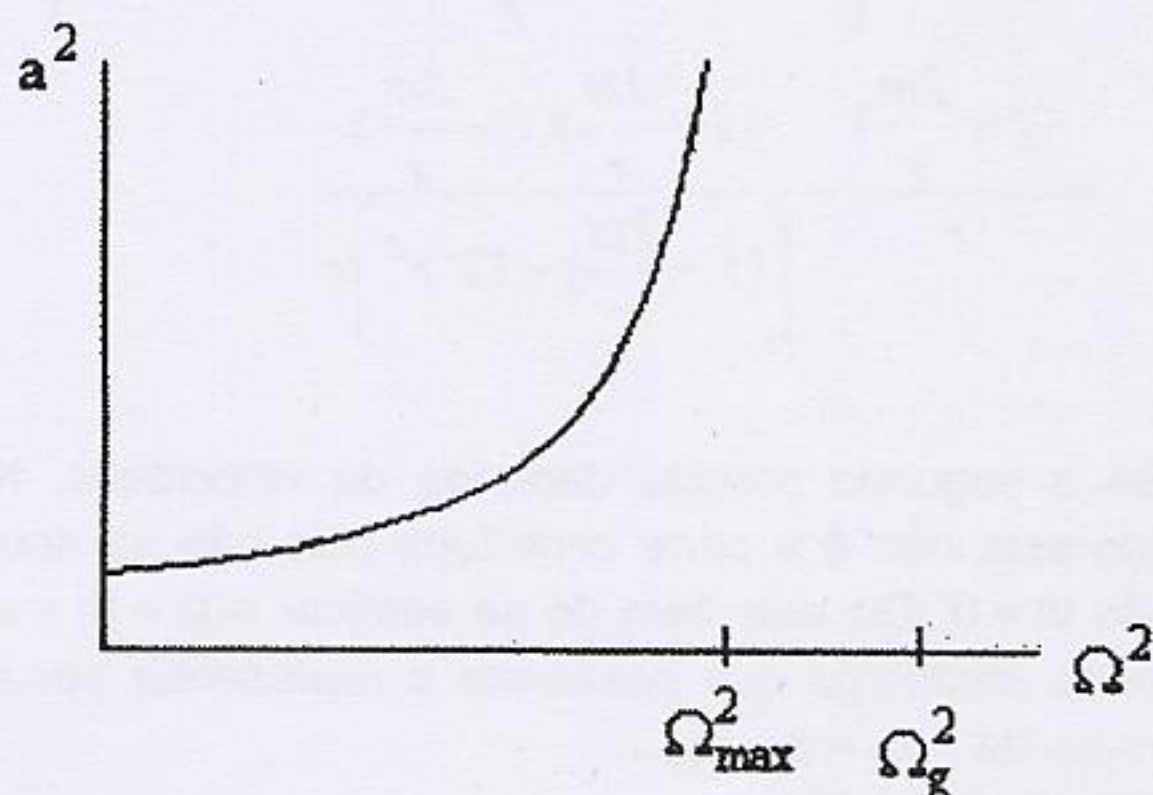


Fig. 3 —  $a^2(\Omega^2)$  para o caso  $2m < r < 3m$ .

Esse tipo de raciocínio é o utilizado em teoria Newtoniana. Relembre-se que aí a aceleração da nave em órbita é dada por

$$a_N = \frac{m}{r^2} - \omega^2 r$$

Esta velocidade angular,  $\omega$ , representa a variação da coordenada angular  $j$  com o tempo medido no referencial do observador. Para fazer uma comparação com a expressão obtida em relatividade geral (4), tem de se notar que aí o tempo próprio medido pelo observador em repouso, é diferente da coordenada  $t$ . Então pode-se escrever,

$$\omega = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt} i$$

E a aceleração é,

$$a_N = \frac{m}{r^2} - \Omega^2 i^2 r \quad (5)$$

### 1.ª Decomposição

Considera-se que sobre a nave actua uma aceleração gravítica apenas função de  $r$ , independente da velocidade. E ainda que o que mantém a nave em órbita é a aceleração centrífuga produzida pelo movimento em órbita. Pode-se assim escrever,

$$a = a_G(r) - a_C(r, \Omega)$$

Separe-se então a aceleração (4) nestas duas parcelas

$$a = \frac{1 - \frac{2m}{r}}{r} \left[ \frac{\frac{m}{r} - \Omega^2 r^2 + (1 - \frac{2m}{r}) - (1 - \frac{2m}{r})}{(1 - \frac{2m}{r}) - \Omega^2 r^2} \right]$$

$$= \frac{(1 - \frac{2m}{r})}{r} - \frac{(1 - \frac{3m}{r})(1 - \frac{2m}{r})}{\left[ (1 - \frac{2m}{r}) - \Omega^2 r^2 \right] r}$$

Só a segunda parcela depende da velocidade. No entanto esta não é a parte centrífuga pois não se anula quando  $\Omega = 0$ . Ou seja, tem de se verificar  $a(\Omega = 0) = a_G$  e a parte centrífuga que passamos a representar por  $a_C$  obtém-se de  $-a_C = a - a_G$ .

Calcule-se então,

$$a(\Omega = 0) = \frac{(1 - \frac{2m}{r})}{r} - \frac{(1 - \frac{3m}{r})(1 - \frac{2m}{r})}{(1 - \frac{2m}{r})r} = \frac{m}{r^2}$$

E portanto,

$$-a_C = \frac{(1 - \frac{2m}{r})}{r} - \frac{(1 - \frac{2m}{r})(1 - \frac{3m}{r})i^2}{r} - \frac{m}{r^2}$$

$$a_C = -\frac{(1 - \frac{3m}{r})}{r} \left[ 1 - (1 - \frac{2m}{r})i^2 \right]$$

Finalmente,

$$a = \frac{m}{r^2} - (1 - \frac{3m}{r})\Omega^2 r i^2. \quad (6)$$

Esta expressão põe em evidência um aspecto surpreendente. A aceleração centrífuga, embora cresça com a velocidade em valor absoluto, muda de sinal quando  $r < 3m$ . Ao manter a definição newtoniana de aceleração gravítica, esta decomposição produz uma alteração da parcela centrífuga para certos valores da coordenada radial  $r$ .

A expressão (6) permite explicar os efeitos representados nas figuras 1 a 3, do seguinte modo:

Na figura 1, a nave, quando parada em relação à massa, sofre uma certa atracção. Ao começar a rodar numa órbita circular fica também sujeita a uma aceleração centrífuga que contraria a atracção. Para uma certa velocidade as duas acelerações cancelam-se e a trajectória no espaço-tempo, correspondente a esta órbita livre

no espaço é uma geodésica. Aumentando a velocidade, desfaz-se o equilíbrio e a nave é puxada para fora. É o comportamento esperado com base na Mecânica newtoniana.

Na figura 2, a nave sofre sempre a mesma aceleração, qualquer que seja a velocidade com que percorra a órbita  $r=3m$ , porque aí não há aceleração centrífuga.

Refira-se que na vizinhança de um buraco negro de Schwarzschild, a curvatura é de tal modo intensa que existe uma geodésica para a luz, com  $r$  constante. Esse valor é precisamente  $r=3m$  [3]. A projecção desta geodésica helicoidal sobre  $\Sigma$  é a órbita  $r=3m$  percorrida pela nave. Conclui-se então que a nave, ao percorrer esta trajectória espacial da luz, não sofre efeitos de inércia, como se afirmou no final da secção II.

Na figura 3, a nave, quando parada, sofre uma certa atracção, mas, ao mover-se, esta aumenta. Isto acontece porque, nesta região, a aceleração centrífuga contribui para a atracção. Este efeito é conhecido como o paradoxo da força centrífuga e foi já referido na Gazeta de Física [1].

Esta situação pode não parecer paradoxal se se tomar em consideração que os conceitos de sentido interior e sentido exterior não são absolutos [4]. De facto, com alguma manipulação algébrica [5], mostra-se que a parcela da aceleração centrífuga dada em (6) tem a direcção e sentido da normal exterior à superfície

$$\frac{r \operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} = \text{const.}$$

Assim, dado um certo ponto  $(r, \vartheta, \varphi)$  de uma órbita, se se definir localmente esta direcção como a direcção exterior, pode-se dizer que a força centrífuga aponta sempre para o exterior. Na figura 4 representa-se a superfície

$$\frac{r \operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} = 3\sqrt{3}m$$

É a superfície de um sólido conhecido por cilindro de Von Zeipel.

Observa-se que em  $r=3m$  a superfície vira-se do avesso. Globalmente, o sentido exterior num ponto com  $r > 3m$  (ponto B na figura) parece ser o inverso do sentido exterior desenhado a partir de um ponto com  $r < 3m$  (ponto A). Note-se que a figura não está desenhada à escala. O eixo  $z$  está dilatado em relação aos eixos  $x$  e  $y$ .

O sentido exterior local na região  $r < 3m$  é o sentido interior global, isto é, aponta para o interior da órbita,

para o eixo de rotação. Pode-se assim considerar que a situação não é paradoxal, já que a força centrífuga aponta sempre localmente para o exterior.

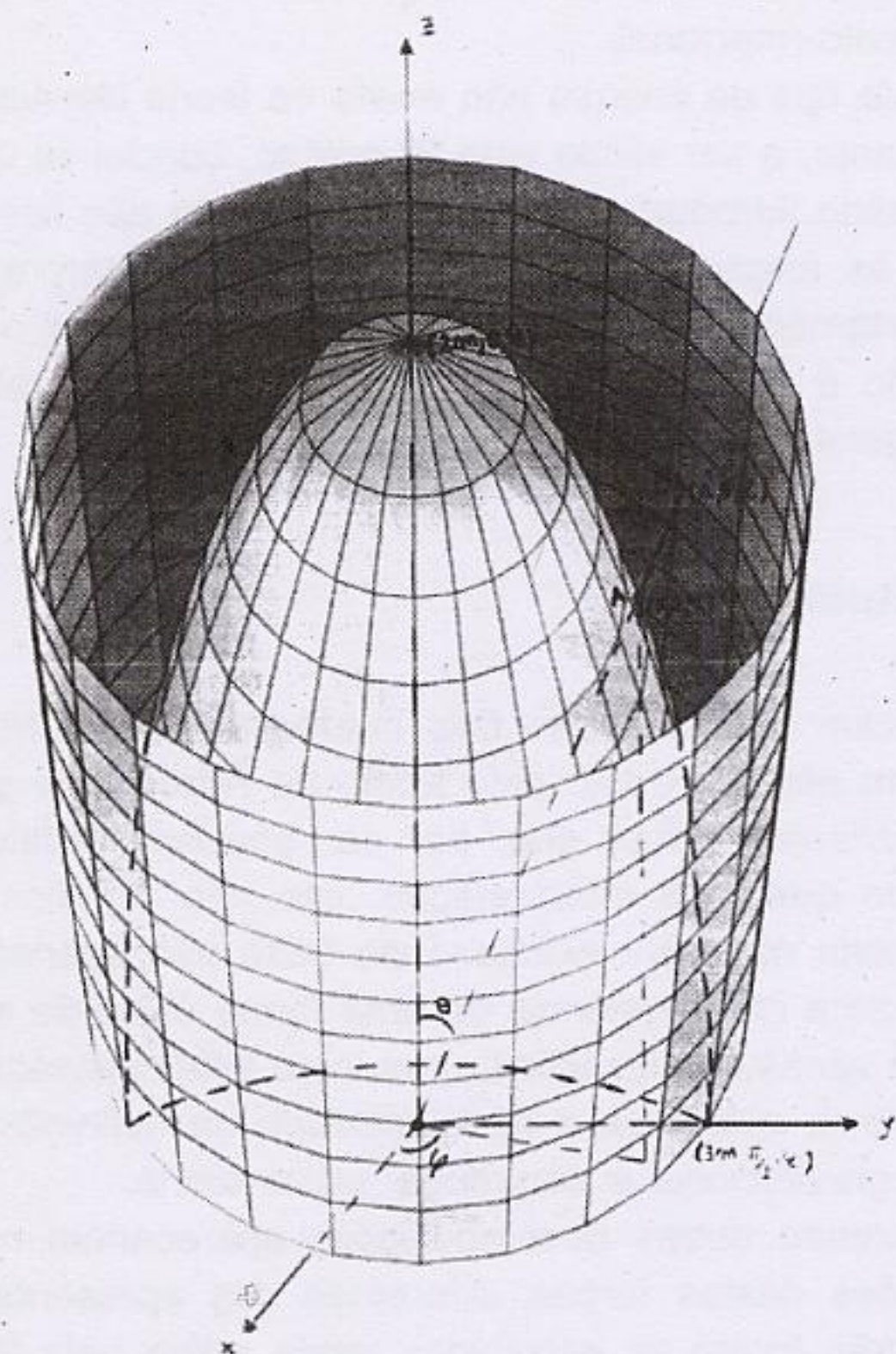


Fig. 4 — Cilindro de Vonz Zeipel.

Voltando à figura 3, note-se que  $\Omega_g > \Omega_{max}$ . Isto indica que a nave nunca se pode mover livremente nessas órbitas, pois para isso teria de atingir uma velocidade superior à da luz.

Refira-se ainda que nesta análise não se consideram órbitas com  $r < 2m$  ( $r = 2m$  é o raio de Schwarzschild) pois essa é a região interior do buraco negro, para lá do horizonte. A região referente à figura 3 é portanto próxima do horizonte. Num buraco negro com massa 10 vezes a massa solar, a órbita  $r = 3m$ , convertida para quilómetros, corresponde a  $r = 44.2 \text{ Km}$ .

Se se aceitar esta interpretação, baseada na análise da nova aceleração centrífuga, para os dois fenómenos contra-intuitivos previstos pela teoria da relatividade geral, tem de se colocar a seguinte questão:

Porque é que a força centrífuga tem este comportamento? Ou, qual a razão de não haver efeitos de inércia nas trajectórias da luz? A resposta não é conhecida. Se o fosse, constituiria uma importante contribuição para o conhecimento da origem da inércia. No entanto apre-

senta-se uma ideia [6] que ajuda a tornar estes fenómenos intuitivos, e que foi já divulgada em [1].

Imagine-se dois astronautas no interior de uma estação espacial em forma de anel, de comprimento  $6\pi m$ , disposta ao longo da órbita  $r = 3m$ . Um deles desloca-se ao longo da estação e o outro observa-o. A luz que se reflecte no primeiro, viaja ao longo do anel até ao segundo astronauta, que nunca deixa de ver o que se afasta. Por outras palavras, aquele que observa pensa que o viajante se desloca ao longo de uma recta e aceita como natural que o movimento de um veículo ao longo da estação não sofra efeitos centrífugos. Isto é, deste ponto de vista, a trajectória da luz não é curva; podemos dizer que é opticamente rectilínea.

Então a definição de inércia pode ser mantida, desde que se substitua a palavra rectilínea pela expressão opticamente rectilínea.

## 2.ª Decomposição

Adopte-se agora um outro critério de decomposição [7] — considere-se que durante a translação a nave aumenta a sua energia com a velocidade, como consequência do aumento da massa efectiva (relativista) da nave  $m\sqrt{1-v^2} = m\gamma(v)$ , onde  $v$  é a velocidade da nave, medida pelo observador em repouso. A aceleração gravítica deve, consequentemente, aumentar do mesmo modo, ou seja, proporcionalmente a uma potência do factor  $\gamma$  de Lorentz.

A nave tem um deslocamento espacio-temporal dado por (2). As partes espacial e temporal dessa expressão são os deslocamentos espacial e temporal medidos pelo observador em repouso em relação à massa. Logo a velocidade é simplesmente a razão entre esses dois deslocamentos,

$$v^2 = \frac{r^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{r^2 \Omega^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) t^2$$

Substituindo na expressão da aceleração (4), obtém-se,

$$a = \gamma^2 \left( \frac{m}{r^2} - \Omega^2 r^2 \right) \quad (7)$$

Note-se que (7) está já na forma separada de acordo com o novo pressuposto.

Isto é,

$$a_G = \frac{m}{r^2} \gamma^2$$

e

$$a_C = r\Omega^2 \gamma^2$$

Este novo critério leva a uma diferente expressão para a aceleração centrífuga que, mantendo as características de se anular quando  $\Omega=0$  e ser, em valor absoluto, crescente com  $\Omega$ , já não se anula, nem muda de sinal, em nenhuma região de  $r$ . É o comportamento esperado da aceleração centrífuga.

Se se aceitar esta como sendo a verdadeira aceleração centrífuga, então deixa de se verificar a ausência de efeitos de inércia nas trajetórias da luz e a inversão em  $r < 3m$ .

No entanto a aceleração total não se altera e portanto as figuras 1-3 continuam a ser válidas. As interpretações é que são diferentes.

Em  $r = 3m$  a aceleração não varia com a velocidade. Isto deve-se ao facto de, nesta órbita, a atracção ( $a_G$ ) e a repulsão ( $a_C$ ) aumentarem do mesmo modo e ambos os acréscimos se cancelarem.

Entre  $r = 2m$  e  $r = 3m$  o aumento de velocidade faz aumentar a atracção. Isto é explicado através de (7), que mostra que nessa região  $a_G$  aumenta mais do que  $a_C$  e o seu efeito domina.

### 3.ª Decomposição

Agora o critério vai ser o de admitir que os conceitos familiares de aceleração gravítica e centrífuga se devem manter [8].

Para simplificação do cálculo, parta-se da aceleração total na forma (6). Desenvolvendo o produto do factor entre parêntesis obtém-se:

$$a = \frac{m}{r^2} - \Omega^2 r i^2 + 3m\Omega^2 i^2 \quad (8)$$

Os dois primeiros termos identificam-se, respectivamente, com as componentes gravítica e centrífuga. São exactamente iguais aos newtonianos, como se pode ver na expressão (5).

Este novo critério faz surgir um novo termo, de sinal atractivo. Em  $r = 3m$ , este último cancela o centrífugo, ficando  $a = a_G$ , o que explica a figura 2.

Na região entre  $2m$  e  $3m$ , o novo termo atractivo vence o centrífugo, o que explica o aumento da atracção na figura 3.

E na região  $r > 3m$ , o termo centrífugo domina o novo termo atractivo.

Os parâmetros do movimento da nave em torno do buraco negro, são a massa deste ( $m$ ), que rege a parte

potencial, e a velocidade angular daquela  $W$ , que determina o comportamento cinético.

O novo termo contém o produto entre os dois parâmetros. Diz-se assim que é um termo de acoplamento potencial-cinético. Isto implica a existência de um novo termo a contribuir para a energia do sistema — a energia gravito-rotacional.

Este tipo de energia não existe na teoria Newtoniana e, portanto, a ser válido este 3º critério, conclui-se que é necessário introduzir um novo acoplamento não linear, a juntar às forças habituais, para permitir reinterpretar o comportamento da nave em torno de um buraco negro. Isto não é de surpreender numa teoria como a relatividade geral que é não linear.

## Conclusão

Foram apresentadas três interpretações diferentes para um efeito previsto pela teoria da relatividade geral. É importante realçar que, por ser possível considerar mais do que uma interpretação, isto não significa que esta teoria não seja exacta. Este facto põe apenas em evidência a não existência de uma forma única de separar, em várias contribuições, uma força total calculada em RG; isto é, evidencia a não unicidade da definição das forças gravitacional e centrífuga, nesta teoria.

Fazendo outras decomposições apareceriam novas definições destas forças, diferentes das apresentadas. Estas três foram as escolhidas neste artigo pela lógica dos seus pressupostos, que não podem à partida ser rejeitados, e pelo interesse das suas implicações.

Recapitulando, os pressupostos podem ser escritos da seguinte forma:

**1.ª Decomposição** — Mantem-se o conceito de aceleração gravítica e define-se o que sobra como sendo a componente centrífuga.

**2.ª Decomposição** — Mantem-se o conceito de aceleração centrífuga e define-se o que sobra como sendo a componente gravítica.

**3.ª Decomposição** — Mantêm-se os conceitos de aceleração gravítica e de aceleração centrífuga e o que sobra é interpretado como um efeito da relatividade geral. Note-se que outras decomposições possíveis teriam de alterar ambos os conceitos habituais.

Todas as abordagens permitem explicar o efeito em estudo, mas têm diferentes consequências. Estas podem ser sintetizadas da seguinte forma:

**1.ª Decomposição** — A nova definição de aceleração centrífuga leva a uma nova definição de inércia:

Um corpo sente os efeitos de inércia se estiver acelerado ou se, movendo-se com velocidade de módulo

constante, percorrer uma trajectória que não seja "opticamente rectilínea". (Note-se que, de acordo com a secção II, este resultado é geral. Isto é, não é apenas válido para trajectórias circulares na solução de Schwarzschild).

**2.ª Decomposição** — A nova definição de aceleração gravítica leva a que esta varie com a velocidade. Assim, por exemplo, um avião ao atravessar o Atlântico, seguindo um paralelo constante, pesa mais do que parado no aeroporto.

**3.ª Decomposição** — Em Relatividade Geral existe um novo tipo de forças, desprezáveis no limite em que a teoria de Newton é válida, que se deve a um acoplamento entre a energia gravitacional e a energia cinética.

Não se sabe qual dos critérios é o correcto, ou mesmo se algum deles o é. Uma maneira de descobrir seria idealizar uma experiência para ser realizada numa viagem à vizinhança de um buraco negro. No entanto a 1ª abordagem tem uma característica diferente das outras, que lhe pode dar uma certa vantagem. Explica o fenómeno da mudança de comportamento da aceleração em  $r=3m$ , baseando-se no facto de essa ser a trajectória da luz. Pelo contrário, nos outros dois casos, apenas se prevê que essa mudança tem de ocorrer. Nestes, o facto desta mudança acontecer na órbita da luz  $r=3m$ , é apenas uma coincidência. Porém, em física as coincidências levantam suspeitas.

## Referências:

1. LAGE, E. — *Gazeta da Física* (1993) **16** 23-24.
2. ABRAMOWICZ, A. & LASOTA, J. P. — *Class. Quantum Gravity* (1997) **14** A23-A30 (e referências aí citadas).
3. SCHUTZ, B. — *A First Course in General Relativity*, (1985) Cambridge University Press p. 279.
4. ABRAMOWICZ, A. — *Mon. Not. R. Astr. Soc.* (1992) **256** 710-718.
5. ABRAMOWICZ, A. — *Mon. Not. R. Astr. Soc.* (1990) **245** 720-728.
6. ABRAMOWICZ, A. — *Scientific American* (1993) (Março) 26.
7. PAGE, D. *Scientific American* (1993) (Agosto) 9.
8. CHAKRABARTI, S. — *Mon. Not. R. Astr. Soc.* (1993) **261** 625-629.

Ismael Tereno é licenciado em Física pela FCUL. Está actualmente a concluir o mestrado em «Física de Altas Energias e Gravitação» na mesma instituição.

Paulo Crawford é doutorado em Física pela Universidade de Lisboa e professor auxiliar da Faculdade de Ciências da mesma Universidade, onde rege entre outras a disciplina de Relatividade e Cosmologia. É responsável pelo grupo de Gravitação e Cosmologia do CFNUL.

## PROJECTO "CIÊNCIA A BRINCAR"

O projecto "Ciência a Brincar", financiado pelo programa Ciência Viva II do Ministério da Ciência e Tecnologia, destina-se a crianças do ensino pré-escolar e 1.º ciclo do ensino básico, pretendendo despertar o espírito de observação e a curiosidade pela Ciência.

Neste projecto, foram preparadas 250 caixas contendo material para a realização de 13 experiências muito simples.

Cada caixa foi acompanhada por um caderno com a descrição e ilustração de cada experiência, organizadas de forma a que a sequência corresponda a um grau crescente de dificuldade. Os textos procuram, numa linguagem simples e viva destinada às crianças, apelar ao sentido de observação e estimular a curiosidade e o gosto pela experimentação. O caderno inclui ainda bibliografia onde os educadores poderão encontrar sugestões de experiências adicionais, de forma a que a utilização deste kit possa ter um efeito multiplicativo.

No interior de cada caixa, o material associado às diferentes experiências foi embalado separadamente, com a identificação do respectivo número. O material foi escolhido de forma a que as experiências fossem de baixo custo e facilmente reproduzíveis nas escolas. Assim, todo o material contido no kit pode ser adquirido em lojas como supermercados, papelarias, retro-sarias, lojas de ferragens, etc., não sendo necessário recorrer a casas de especialidade.

Foram contactadas por carta 60 escolas do 1.º ciclo do ensino básico e jardins de infância da região Centro, explicando os objectivos do projecto e solicitando a sua adesão. Aderiram ao projecto 26 escolas, representadas por 47 professores.

No dia 1 de Abril de 1998 foi realizada a sessão de lançamento do projecto no Departamento de Física da Universidade de Coimbra destinada aos professores. A sessão contou com a presença do Secretário-Geral da Sociedade Portuguesa de Física, Prof. Dr. Carlos Matos Ferreira e do Presidente do Departamento de Física da Universidade de Coimbra, Prof. Dr. João da Providência e Costa, bem como toda a equipa do Ciência a Brincar. Foram realizadas as 13 experiências propostas, seguindo-se um debate com os professores sobre os objectivos e o modo prático de execução do projecto. No final, foram entregues dois kits por professor. Estes últimos orientarão a execução das experiências nas respectivas turmas.

Posteriormente à realização da sessão, a Sociedade Portuguesa de Física tem recebido numerosos pedidos de adesão ao projecto, sendo o número total de professores envolvidos neste momento de 75, em 44 escolas. Pelas informações que nos chegam, as experiências têm-se realizado com dinamismo e entusiasmo. Continuaremos, naturalmente, a aceitar pedidos de adesão enquanto houver kits disponíveis para entregar. Estas adesões ao projecto têm revelado que o retraimento inicial de alguns professores perante uma iniciativa que é inovadora no ensino básico, se tem vindo a dissipar à medida que estes tomam conhecimento do sucesso que a realização das experiências tem junto das crianças.

Neste momento, e com base na experiência adquirida, estamos a preparar um livro de actividades experimentais para crianças.