# Viagens no Espaço-tempo e Paradoxo dos Gémeos

Paulo Crawford
*Centro de Astronomia e Astrofísica da Universidade de Lisboa*
*Campo Grande, Ed. C8; 1749-016 Lisboa – Portugal*

22 de Maio de 2012

Nos últimos anos têm surgido na literatura da especialidade muitos trabalhos sobre "Máquinas do Tempo", isto é, construções geométricas de espaço-tempo, soluções das equações de Einstein, da sua Teoria da Relatividade Geral, que admitem **curvas temporais fechadas**; isto significa que qualquer observador que seguisse ao longo dessas linhas do Universo (trajectórias no espaço-tempo) poderia re-visitar o seu passado. Mas não vamos discutir aqui este assunto aqui, pois devemos antes clarificar a noção de tempo relativo, introduzida por Einstein, para entendermos primeiro como a física actual admite a possibilidade teórica de viajar para o futuro, tal como acontece no célebre paradoxo dos gémeos. Mas atenção: isto não significa que podemos viajar no tempo para a frente e para trás, tal como podemos fazer no espaço. A questão das viagens ao passado é bem mais delicada, pois está povoada de paradoxos.

Talvez por isso, na sequência dessa discussão sobre as viagens no tempo, voltaram a aparecer artigos sobre o chamado **paradoxo dos gémeos** onde se debate a sua resolução no âmbito da teoria da relatividade (restrita). Aliás, nos últimos cem anos o paradoxo dos gémeos tem sido uma fonte de inspiração e de controvérsia para todos os que ensinam e aprendem a teoria da relatividade. Habitualmente, um dos gémeos, A, permanece em repouso num referencial inercial, enquanto o outro, B, parte com uma velocidade constante e realiza uma viagem até um local distante, voltando depois, com uma velocidade com o mesmo módulo, ao local onde se encontra o gémeo A. Na chegada, o gémeo B descobre que está mais novo que o gémeo A. O aparente conflito com o princípio da relatividade, é naturalmente resolvido ao notar-se que o princípio só é válido quando aplicado a observadores inerciais. Ora, nesta história, há sempre um gémeo acelerado, isto é, alguém que muda de direcção durante a viagem, embora o tempo de aceleração possa ser tão curto quanto quisermos, quando comparado com o tempo total do percurso, e outro inercial; este último pode sempre considerar-se em repouso, no seu referencial próprio, e desse ponto de vista não sai do mesmo ponto do espaço. Seguindo a lógica da Teoria da Relatividade, constatamos que o gémeo acelerado quando se cruza novamente com o gémeo inercial está mais novo. Mesmo assinalando a assimetria dos dois gémeos, no seu percurso através do espaço-tempo, o resultado não deixa de nos parecer paradoxal.

Para analisar esta questão, de modo a clarificar todas as controvérsias, vamos começar por introduzir diagramas no espaço-tempo da Relatividade Restrita (RR), vulgarmente conhecidos por *diagramas de Minkowski*, que desempenham um papel pedagógico relevante na assimilação dos efeitos cinemáticos da RR (dilatação do tempo e contracção do espaço), e na compreensão da estrutura causal do espaço-tempo plano, isto é, a relação de causa e efeito entre diferentes acontecimentos. Estes diagramas são, aliás, um bom ponto de partida para introduzir os conceitos fundamentais da RR. Mas também poderão ter uma função complementar da discussão algébrica habitual. Qualquer destas abordagens é bastante simples, mas a conjugação das duas ajuda a clarificar os aspectos mais controversos, ou seja, aqueles que representam uma mudança radical em relação à descrição newtoniana. Neste texto assumimos que os alunos já tiveram uma iniciação à RR, conhecendo as transformações de coordenadas entre dois referenciais, as famosas transformações de Lorentz, e pretendem clarificar as suas consequências cinemáticas e os paradoxos daí decorrentes.

# Do Espaço e do Tempo

Mas o que entendemos pela noção de espaço? O que significa afirmar que um espaço é plano? E como podemos distinguir um espaço plano de um espaço curvo? Todos os que imaginam um espaço como um vazio de coisas materiais, o que resta quando abstraímos os objectos e os seres presentes, ficam perplexos com a noção de espaço curvo. Para a maioria das pessoas, o espaço destina-se a ser ocupado pelas corpos nos seus movimentos relativos, o espaço é o palco onde se desenrolam os diferentes acontecimentos. Mas, para o matemático, um espaço é uma colecção de “pontos”, cuja natureza pode variar consoante as aplicações matemáticas ou físicas. Assim, o espaço vazio pode entender-se um espaço sem matéria, mas não como um espaço sem propriedades definidas entre os seus elementos - os pontos do espaço. Em particular, os pontos do espaço-tempo da teoria da relatividade são acontecimentos físicos, algo que ocorreu num certo instante e num certo local. As relações entre os acontecimentos vão permitir caracterizar o espaço-tempo.

E sobre o tempo? Como poderemos defini-lo? Na antiga Grécia, Platão admitia que o tempo era cíclico, tinha um princípio e fechava-se sobre si próprio. Muito provavelmente, este tempo circular era inspirado nos fenómenos observados na natureza, nomeadamente na alternância dos dias e das noites, na repetição das estações do ano e, em geral, na observação do movimentos dos corpos celestes. Também outras culturas antigas como os Incas, os Maias, os Babilónios, os Hindus, e muitas outras, tinham um conceito de uma roda do tempo, que permitia olhar para o tempo como cíclico, consistindo em idades que se repetiam. Pelo contrário, o conceito judaico-cristão, baseado na Bíblia, é o de um tempo linear, que começa com o acto da Criação por Deus. Nesta visão cristã, o fim do mundo será também o fim do tempo. Um tempo com um princípio e um fim.

Santo Agostinho, no Livro 11 das suas *Confissões*, ao meditar sobre a natureza do tempo, pergunta, "O que é o tempo, então? Se ninguém me pergunta, eu sei: se desejo explicar a alguém que me pergunta, eu não sei." E começa então a definir o tempo por aquilo que não é, e não por aquilo que é, ou seja, faz uma abordagem que se traduz numa definição negativa. Mas por fim, Santo Agostinho acaba por chamar ao tempo uma distensão da mente (Confissões 11.26) pela qual nós conseguimos compreender simultaneamente o passado na memória, o presente pela a atenção e o futuro pela expectativa.

No princípio do século dezassete, tanto Descartes como Galileu contribuíram para uma descoberta muito frutuosa: podemos desenhar um gráfico, em que um dos eixos é o espaço e o outro é o tempo, e descrever o movimento de um objecto através do espaço por intermédio de uma curva. Desta forma o tempo é representado como se fosse uma outra dimensão do espaço. Mas nesta representação o movimento fica congelado, ou seja, toda a história da continuidade do movimento e a correspondente mudança é apresentada como algo estático e imutável. É certo que esta descoberto deu muitos frutos e continua a dar. Mas será que é possível mantê-la ao nível do Universo primordial, onde a quantificação do espaço e do tempo nos parecem essenciais? Alguns duvidam.[1]

Voltando um pouco atrás, ao século XVIII, encontramos dois pontos de vista filosóficos sobre o tempo, que estão em oposição. No primeiro, o tempo é parte de uma estrutura fundamental do universo, uma dimensão na qual os acontecimentos podem ocorrer numa sequência. Este ponto de vista realista, defendido por Sir Isaac Newton (1642-1727), está em oposição a um outro

[1] Sugiro a leitura de duas das referencias bibliográficas: L. Smolin em *The Trouble with Physics*, e J. Barbour em *The End of Time*.

onde o tempo não é nem um acontecimento nem uma coisa, e como tal não é mensurável. Este segundo ponto de vista, que se insere na tradição de Gottfried Leibniz (1646-1716) e de Immanuel Kant (1724-1804), defende que o tempo não é nenhuma entidade que "flui", mas é antes parte de uma estrutura intelectual fundamental no quadro da qual os seres humanos podem formar sequências e comparar acontecimentos (com o auxílio do espaço e do conceito de número). Mas realmente, o conceito que dominou a física até ao final do século XIX, foi o conceito de Tempo Absoluto de Newton, que declarou que o tempo fluía com a mesma taxa para todos os observadores do Universo, independentemente do seu estado de movimento. Porém, em 1905 Einstein mudou completamente esta noção do tempo. Para Einstein, o tempo flui de forma diferente para diferentes observadores (inerciais), e três anos mais tarde Herman Minkowski (1864-1909) mostrou que a teoria da relatividade restrita de Einstein podia ser adequadamente descrita geometricamente no quadro de um espaço-tempo quadri-dimensional, onde os conceitos de espaço e de tempo estão indissoluvelmente ligados. Passados mais de 100 anos, esta visão ainda se mantém no essencial. Numa tentativa de caracterizar as várias facetas ou propriedades do tempo, podemos afirmar que o tempo existe mas não sabemos se é um conceito fundamental ou emergente. Também pensávamos que temperatura era uma propriedade básica da natureza, mas hoje sabemos que emerge do movimento dos átomos. Sabemos hoje que o passado e o futuro são igualmente reais, pois todo o acontecimento no passado ou no futuro está implícito num acontecimento presente. Embora antes aceitássemos a visão de Newton, onde o tempo era universal e igualmente partilhado por toda a gente, aprendemos com Einstein que a passagem do tempo para cada pessoa depende de como viaja no espaço e da sua localização no campo gravítico. E talvez um dia o envelhecimento possa ser invertido. Quem sabe se um dia não poderemos rejuvenescer em vez de envelhecer?

# Diagramas do Espaço-tempo

Comecemos por usar os diagramas do espaço-tempo para tornar evidente o **carácter relativo da simultaneidade** entre acontecimentos distantes no espaço, isto é, o facto da simultaneidade entre acontecimentos distantes não ser universal para os observadores inerciais, quando as velocidades relativas são muito grandes (próximas da velocidade da luz no vácuo). Observemos a figura (1), onde se observam os pares de acontecimentos $(O, A)$ e $(O, A')$.

O primeiro par é constituído por 2 acontecimentos simultâneos em $S$ e o segundo por 2 acontecimentos simultâneos em $S'$. As linhas de simulta-

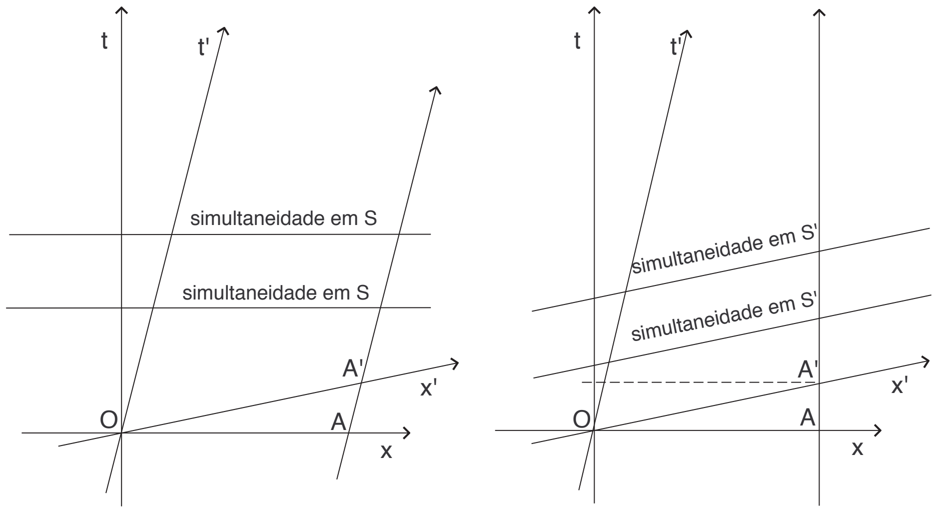


Figura 1: Os acontecimentos simultâneos em $S$ estão sobre linhas paralelas ao eixo do $x$ e os acontecimentos simultâneos em $S'$ estão sobre linhas paralelas ao eixo $x'$. Por exemplo, os acontecimentos $(O, A)$ são simultâneos em $S$ e os acontecimentos $(O, A')$ são simultâneos em $S'$.

neidade em cada um dos referenciais, $S$ e $S'$, são paralelas aos eixos $x$ e $x'$, respectivamente. Note que, como habitualmente, os pontos de um dado eixo, nestes espaços 2-D, são todos os pontos em que a coordenada do outro eixo é nula. Ou seja, no sistema de referência $S'$ de coordenadas $(t', x')$, os pontos do eixo $x'$ são os pontos tais que $t' = 0$, isto é, os pontos que satisfazem $x - vt = 0$. De modo semelhante, o eixo $t'$ é o conjunto dos pontos tais que $x' = 0$, isto é, os pontos que satisfazem $t - vx = 0$ (com $c = 1$).

Voltando à discussão da simultaneidade em cada referencial, vemos que o que é simultâneo em $S$ (ou seja, para os observadores em repouso no referencial inercial $S$) não é simultâneo em $S'$ e vice versa.

## Dilatação do tempo

Dizemos que dois acontecimentos formam **um par no tempo** ou são **temporais**, se há um referencial onde eles ocorrem no mesmo ponto do espaço, o chamado **referencial próprio**, como é o caso de um viajante, sentado num banco de um comboio, que começa a leitura do jornal e acaba ao fim de uma hora. O início e o fim da leitura definem dois acontecimentos que ocorrem no mesmo ponto do espaço (do comboio) em instantes diferentes. Em qualquer outro referencial, por exemplo no referencial Terra, o intervalo de tempo entre esses mesmos dois acontecimentos é maior do que o intervalo de tempo próprio. E por esta razão se fala em **dilatação do tempo**. Este facto, muito conhecido, e fácil de verificar em termos algébricos, torna-se muito evidente com o auxílio do diagrama de espaço-tempo que se segue Fig. (2).

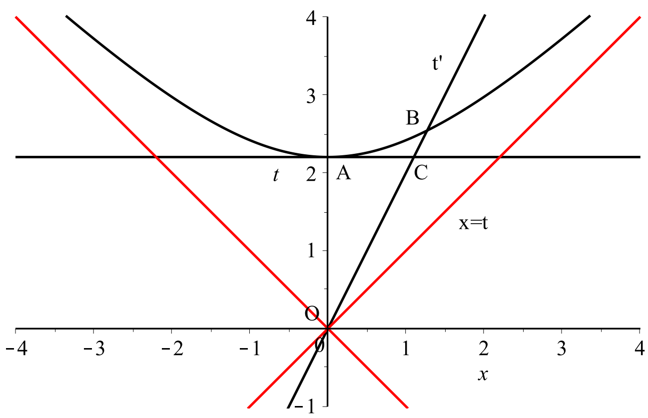


Figura 2: O ramo de hipérbole que passa pelos pontos $A$ e $B$ define o lugar geométrico dos acontecimentos que estão *à mesma distância* da origem do sistema de coordenadas, no sentido da fórmula (4). Logo, $t_A = t'_B$ e como $t'_C < t'_B$ e $t_A = t_C$ vem $t'_C < t_C$. Note que o eixo do tempo do referencial $S$ passa pelos pontos $O$ e $A$ e que o eixo do referencial $S'$ passa pelos pontos $O, C$ e $B$.

Recordemos que, devido à constância da velocidade da luz e à isotropia da sua propagação no espaço vazio, uma vez emitido um sinal luminoso num dado ponto do espaço e num dado instante, tomados respectivamente como origens espacial e temporal dos referenciais $S$ e $S'$, deve verificar-se

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0,$$

ou seja, os pontos do espaço que num dado instante de cada referencial se encontram na mesma fase de vibração formam uma onda esférica que está centrada na origem do referencial respectivo. Essa onda esférica tem o raio $ct$ em $S$ e o raio $ct'$ em $S'$.

Por outras palavras, a invariância da velocidade da luz no vácuo, $c$, implica a invariância da expressão quadrática

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2 + t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2, \tag{1}$$

conhecida por **intervalo do Universo**. Esta forma quadrática caracteriza um espaço 4-dimensional a que chamamos espaço-tempo de Minkowski[2], $M_0^4$, em honra de H. Minkowski que o propôs em Setembro de 1908, na sua alocução no $80^o$ Encontro dos Cientistas Naturais e Médicos Alemãs (80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians), como sendo o espaço adequado à descrição da teoria da RR de Einstein.

No que se segue vamos restringir a nossa discussão a uma dimensão espacial, isto é, escrevemos (1) como

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2. \tag{2}$$

A equação (2) permite definir o intervalo do Universo, neste espaço-tempo a duas dimensões, (2-D), como uma quantidade que toma a mesma forma em todos os referenciais inerciais—relacionados entre si por uma transformação de Lorentz (TL)[3] especial (segundo $x$)—exprimindo assim a invariância da velocidade da luz, $c$, neste espaço. Ou seja, as TL são as transformações que deixam invariante a forma quadrática dada pela Eq.(1). Mas neste texto evitamos utilizá-las explicitamente. No caso de dois acontecimentos cujas coordenadas têm valores infinitesimalmente próximos, escreve-se

$$ds^2 = dx^2 - c^2dt^2. \tag{3}$$

Este invariante pode ser entendido como uma generalização da definição habitual de distância a um espaço-tempo (a duas dimensões). Quando trabalhamos com três dimensões de espaço e uma de tempo, temos então o espaço-tempo de Minkowski (4-D) original, e ao respectivo invariante chamamos *intervalo do Universo* entre dois acontecimentos infinitesimalmente próximos, o acontecimento origem $(0, 0, 0, 0)$ e o acontecimento de coordenadas $(cdt, dx, dy, dz)$. Na verdade, tal como a fórmula euclidiana

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta r^2$$

característica do espaço ordinário 3-dimensional, representa o quadrado da distância entre dois pontos cujas coordenadas diferem de $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, a fórmula

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = \text{constante},$$

[2]Hermann Minkowski afirmou a 21 de Setembro de 1908 que: "daqui em diante o espaço só por si e o tempo só por si estão condenados a tornarem-se meras sombras, e só uma união dos dois preservará uma realidade independente".

[3]Uma TL descreve a relação entre as diferentes medidas de espaço e de tempo, feitas por 2 observadores com uma velocidade relativa $\mathbf{v}$. A TL é dita especial se a direcção de $\mathbf{v}$ coincide com um dos eixos.

caracteriza as "distâncias"neste espaço-tempo de Minkowski (4-D). Voltando ao espaço-temo (2-D), o quadrado da "distância"entre o acontecimento coordenadas $(ct, x)$ e a origem $(0, 0)$, neste espaço-tempo, é dada por

$$x^2 - c^2t^2 = \text{constante.} \tag{4}$$

e, em geral, a "distância" entre dois quaisquer acontecimentos é $\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$. Note que a Eq. (4) define uma hipérbole neste espaço-tempo de Minkowski (a duas dimensões).

Voltando ao nosso exemplo acima e fazendo $c = 1$, temos para o par temporal $(O, C)$ da Fig. (2)

$$\Delta s_{OC}^2 = -t_C^2 + x_C^2 = -t'^2_C \Rightarrow t_C^2 = x_C^2 + t'^2_C \tag{5}$$

concluímos que $t'_C < t_C$; note que os acontecimentos $O, C$ e $B$ ocorrem todos na origem espacial de $S$.

Este diagrama representa a seguinte situação física: um relógio de $S'$ desloca-se em relação a $S$ com velocidade $v = x_C/t_C$, e no seu percurso cruza-se com dois relógios (previamente sincronizados) e em repouso em $S$, colocados nos pontos de coordenadas espaciais $x = 0$ e $x = x_C$. Atendendo à figura, vemos que o relógio de $S'$ é acertado pelo relógio de $S$, e colocado na origem espacial, de modo que ambos começam a marcar os instantes $t = 0$ e $t' = 0$ no mesmo acontecimento $O$. Quando o relógio de $S'$ se cruza com o outro relógio de $S$ que está a marcar $t_C$, marca o tempo $t'_C < t_C$, e por isso se diz que *o relógio de $S'$ atrasa-se em relação aos dois relógios de $S$*. O valor exacto do atraso é fácil de determinar a partir da equação (5),

$$t_C^2 - x_C^2 = t'^2_C \Rightarrow t'_C = t_C\sqrt{1 - x_C^2/t_C^2} = t_C\sqrt{1 - v^2} \tag{6}$$

Fixemos assim esta ideia simples: na dilatação do tempo compara-se o intervalo de tempo entre dois acontecimentos, medido por um mesmo relógio (*tempo próprio*), com o intervalo correspondente medido por dois outros relógios. Isto supõe que os dois acontecimentos ocorrem no mesmo ponto do espaço do primeiro relógio, e em pontos do espaço diferentes no referencial dos outros dois relógios, localizados onde esses mesmos dois acontecimentos ocorrem. Sendo o movimento um conceito relativo, não podemos pois afirmar simplesmente que os relógios em movimento se atrasam em relação aos relógios em repouso. Mas sim que, havendo um movimento relativo entre um relógio de um referencial e dois relógios de outro, o relógio do primeiro referencial atrasa-se em relação aos dois relógios do outro, entendendo-se que os acontecimentos em causa, cujo intervalo de tempo se está a medir, ocorrem no mesmo ponto do espaço do primeiro referencial, e em dois pontos distintos do espaço do segundo referencial, onde estão localizados os dois relógios (previamente sincronizados). A melhor forma de introduzir implicitamente a noção de movimento e sintetizar o resultado anterior é afirmar que **o tempo próprio entre dois acontecimentos é sempre mais curto que o tempo correspondente medido noutro referencial qualquer**, onde os acontecimentos ocorrem em pontos do espaço diferentes.

## Contracção de Comprimentos

Pelo que vimos anteriormente, há uma perfeita simetria entre os diferentes referenciais inerciais. A dilatação do tempo ocorre porque se faz uma comparação entre um relógio de um referencial e dois relógios espacialmente separados de outro referencial. E embora possa sincronizar quantos relógios quiser de um mesmo referencial, não posso sincronizar vários relógios de referenciais diferentes. Isto é uma consequência do carácter relativo da simultaneidade entre acontecimentos espacialmente separados, que naturalmente decorre do valor finito da velocidade da luz (no vácuo). De igual modo, os comprimentos na direcção do movimento serão sempre maiores no referencial próprio e serão contraídos em todos os outros referencias em relação aos quais os objectos se movem. Para medir o comprimento de uma barra que se desloca longitudinalmente, devo determinar **simultaneamente** a posição das suas extremidades e assim determinar as suas coordenadas. A partir da diferença entre as coordenadas fico a conhecer o comprimento. Como a simultaneidade de acontecimentos distantes no espaço é um conceito relativo, que depende do referencial, não surpreende que o comprimento da barra dependa do referencial.

Na realidade, a dilatação do tempo e a contracção dos comprimentos não são efeitos independentes, na mesma medida em que o tempo e o espaço não são coordenadas independentes. Recordemos a afirmação de Minkowski a propósito da construção do espaço-tempo.

Na Fig. (3) vemos que as extremidades da barra, que está em repouso em $S'$, descrevem duas linhas do Universo paralelas; a primeira passa pela origem $O$, e coincide com o eixo $t'$, e a segunda passa pelos acontecimentos $A$ e $B$. Claramente, o comprimento da barra em $S'$ é dado por $x'_B > x_A$, visto que $x'_O = 0$, e o comprimento em $S$ é $x_A = 1$ unidade da escala. Ora, sabemos que nesta geometria hiperbólica $x_A = x'_C < x'_B$. Note que se verificam as seguintes relações:

$$x_A^2 = {x'}_A^2 - {t'}_A^2 = {x'}_B^2 \left(1 - v^2\right) \tag{7}$$

$$x_A = {x'}_B \sqrt{1 - v^2} = 1, \tag{8}$$

pois a hipérbole ${x'}^2 - {t'}^2 = 1$ intercepta a recta $t' = 0$ num ponto $x' = 1 < x'_B$.

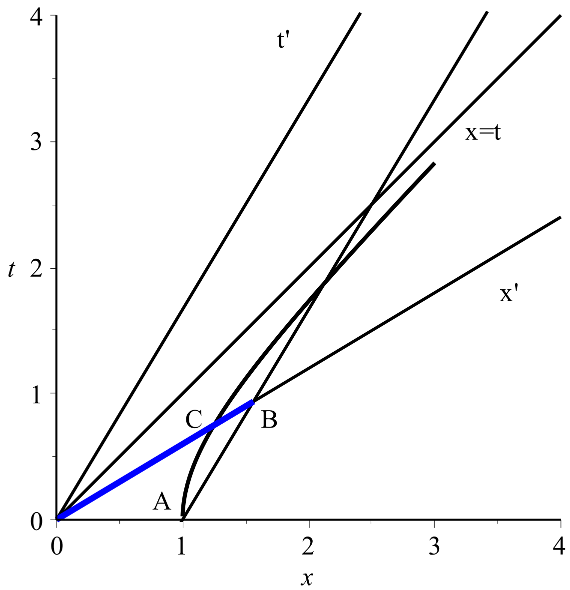


Figura 3: O ramo de hipérbole que passa pelos pontos $A$ e $C$ define o lugar geométrico dos pontos do espaço-tempo (acontecimentos) que estão à distância de uma unidade da origem do sistema de coordenadas. Ora, os acontecimentos $O$ e $B$ são simultâneos em $S'$ e, por isso permitem medir o comprimento próprio da barra em $S'$, o qual é claramente maior que o comprimento medido em $S$ a partir dos acontecimentos $O$ e $A$, simultâneos em $S$. Note que o ramo de hipérbole intersecta a barra num ponto $C$ com $x'_C < x'_B$.

Em conclusão: as barras que estão alinhadas com a direcção da velocidade com se deslocam em relação a um dado referencial (laboratório) são 'observadas' contraídas pelos observadores do laboratório. O comprimento próprio de uma barra, $\ell_0$ é sempre maior que o comprimento $\ell$, **medido** por um observador em relação ao qual a barra se desloca com velocidade $v$

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - v^2}. \tag{9}$$

Esta contracção dos comprimentos acontece porque quando um observador quer medir o comprimento de uma barra que se aproxima ou se fasta dele, deve observar **simultaneamente** as posições das extremidades da barra. Ora, como a simultaneidade de acontecimentos distantes depende do referencial, observadores em diferentes referenciais fazem escolhas diferentes de acontecimentos simultâneos, e por isso **medem** comprimentos diferentes.

*Nota sobre o 'Observador' em RR*

Muitas vezes os livros de relatividade usam expressões abreviadas que induzem os leitores em erro. Tenho procurado evitar isso, embora seja obrigado a pagar o preço da falta de economia no uso das palavras. Com isso, por vezes arrisco-me a escrever frases muito longas e pouco claras para quem lê apressadamente. Mas é fundamental caracterizar muito bem os processos de observação, ou de medida, que ocorrem em cada um dos efeitos cinemáticos ou na análise dos falsos paradoxos. O termo "observador" em RR deve ser entendido como alguém que "mede" e não como alguém que "vê". Para isso, devemos entender que **um observador é na realidade um conjunto indeterminado de relógios fixos em diferentes posições $(x, y, z)$, distribuídos por todo o espaço acessível, e sincronizados entre si**.

Não fazendo a destrinça entre "medir" e "observar" poderá levar-nos a admitir que a contracção relativista do comprimento de uma barra em movimento obrigaria a que a barra fosse imediatamente vista como sendo encurtada, na direcção do movimento. Mas isso implicaria que a localização de todos os pontos do objecto fosse medida simultaneamente para dar uma imagem verdadeira da barra. Porém, não é isso que acontece. Como esclarecia Victor Weisskopf[4]: "Quando vemos ou fotografamos um objecto, registamos os fotões emitidos pelo objecto, quando chegam simultaneamente à retina ou à chapa fotográfica. Isso implica que esses fotões não foram emitidos simultaneamente por todos os pontos do objecto. Os pontos mais afastados do observador emitiram a sua parte da imagem há mais tempo do que os pontos mais próximos. Sendo assim, se o objecto está em movimento, a imagem do objecto, vista ou registada na fotografia, será distorcida, uma vez que o objecto estava em diferentes posições, quando as suas diferentes partes emitiram a luz vista pelo observador ou registada na foto." Esta análise, de Victor Weisskopf fornece mais um argumento para que se entenda o termo "observador"como quem "mede" e não como quem "vê".

## O efeito de Doppler

Vamos começar por reexaminar o efeito do movimento relativo sobre a taxa de progressão do tempo medido por dois observadores inerciais distintos. Consideremos então dois observadores inerciais, sejam eles Duarte e Mariana, em movimento relativo com velocidade $v$. Vejamos como podem estes observadores medir a sua distância relativa num dado instante do **tempo próprio** de um deles, isto é, o tempo medido no referencial onde o observador está parado. Comecemos por admitir que os observadores se cruzaram

[4]V.T. Weisskoft, "The Visual Appearance of Rapidly Moving Objects," *Physics Today* 13 (9) 1960.

num instante anterior e, nesse instante, acertaram os seus relógios $t = t' = 0$. Para medir distâncias e comparar os tempos dos seus relógios, Duarte e Mariana podem trocar sinais "luminosos", ou sinais de radar[5] que, de acordo com o segundo postulado, se deslocam com a mesma velocidade $c = 1$ em relação a qualquer deles.

O Duarte poderá medir a que distância se encontra a Mariana, num dado instante do seu tempo próprio, se enviar um sinal de radar no instante $t_A$, que será entretanto reflectido pela Mariana e chega de novo ao Duarte no instante posterior $t_B > t_A$.

Dirá então que a Mariana estava à distância $d = c(t_B - t_A)/2$ segundos-luz, ou simplesmente $d = (t_B - t_A)/2\ s$, visto que $c = 1$, no momento em que o sinal de radar foi reflectido pela Mariana. O instante correspondente a esse acontecimento, $t_C$, facilmente se calcula, no referencial do Duarte, em função dos tempos $t_A$ e $t_B$, como

$$t_C = \frac{1}{2}(t_A + t_B).$$

É razoável admitir que a um intervalo de tempo $T$, entre dois sinais electromagnéticos enviados pelo Duarte, corresponde um intervalo

$$T' = KT, \tag{10}$$

no referencial da Mariana, havendo entre eles uma relação de proporcionalidade, uma vez que as coordenadas dos dois referenciais devem estar relacionadas linearmente; é claro que $K$ é função da velocidade relativa entre os dois observadores e $K > 1$, no caso em que a Mariana se afasta do Duarte. Mas acontecerá exactamente o contrário se a Mariana se aproximar do Duarte, isto é, $K < 1$. Ora vejamos isso com o auxílio do seguinte exemplo (ver figura 4).

Suponhamos que a Mariana se afasta do Duarte com uma velocidade $v = 0.6$ ($c = 1$), e que o Duarte envia os seus sinais para a Mariana a intervalos regulares de 6 meses do seu tempo próprio. Se quando o Duarte envia o primeiro sinal, a Mariana está já a 0.5 anos-luz de distância, então o sinal levará 1.25 anos a atingi-la, como facilmente se verifica. Seis meses depois de enviar o primeiro sinal, Duarte envia um segundo sinal de radar. Durante esse tempo, $T = 0.5$ ano, a Mariana afastou-se mais 0.3 anos-luz; ou seja, quando o segundo sinal luminoso parte do Duarte, a Mariana está a $T = 0.8$ ano, de modo que o sinal de radar vai ter de percorrer uma distância maior para atingi-la. É fácil mostrar que o segundo sinal vai percorrer uma

[5] O **radar** - radio detection and ranging - é usado para fazer um levantamento e traçar um mapa da nossa vizinhança, e foi inventado nos anos 40 do século XX.

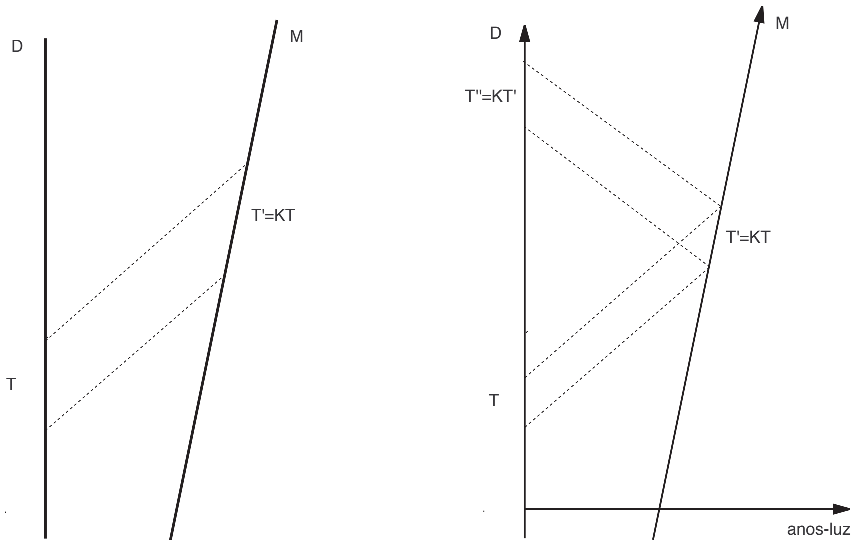


Figura 4: No gráfico da esquerda, o Duarte envia dois sinais luminosos para a Mariana, separados de um intervalo $T$, que os recebe separados de um intervalo $T' = KT$, onde $K > 1$. No gráfico da direita, O Duarte envia dois sinais luminosos para a Mariana, separados de um intervalo $T$, e esta devolve-os assim que os recebe.

distância de 2 anos-luz até encontrar a Mariana. Portanto, pelo menos do ponto de vista do Duarte, é evidente que a um intervalo de 6 meses entre dois sinais emitidos corresponde um intervalo maior entre os dois sinais recebidos pela Mariana; concretamente, o Duarte mede um intervalo de tempo entre os dois sinais recebidos pela Mariana $t_B - t_A = 1.25$ ano. Isto não nos diz ainda qual o intervalo de tempo medido pela Mariana, mas é com certeza uma indicação de que esse intervalo não será 6 meses, como para o Duarte. Um efeito semelhante ocorrerá se os sinais fossem agora enviados da Mariana para o Duarte. E é de esperar, que sendo a velocidade relativa a mesma, o factor $K$ que relaciona os intervalos de tempo também seja o mesmo, como o exige o princípio da relatividade.

Como veremos, a partir da fórmula deduzida adiante - ver a função $K(v)$ dada em (12) - $K = 2$ no nosso caso e, portanto ao intervalo de 6 meses entre dois sinais consecutivos, emitidos pelo Duarte, corresponde um intervalo de 1 ano na recepção desses mesmos sinais pela Mariana. E se os sinais recebidos pela Mariana forem (imediatamente) reflectidos de modo a regressarem ao Duarte, este recebê-los-á separados de dois anos (ver figura 6). Porém, se a Mariana estivesse a aproximar-se com $v = 0.6$, e estando a uma distância de 6 meses-luz no momento em que o Duarte lhe envia o primeiro sinal de radar,

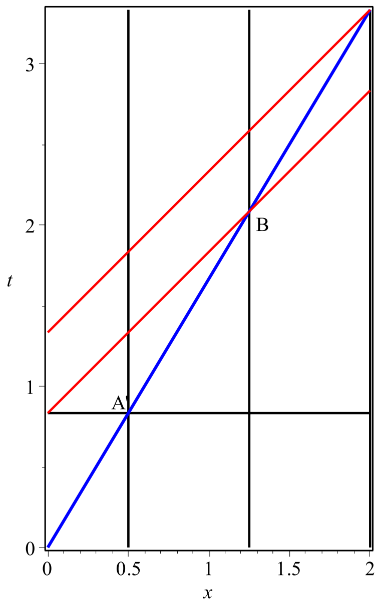


Figura 5: A Mariana (trajectória azul) afasta-se do Duarte com uma velocidade $v = 0.6$ ($c = 1$), e este envia dois sinais luminosos (trajectórias encarnadas) para a Mariana, separados de 6 meses. Quando o Duarte envia o primeiro sinal, a Mariana está a 0.5 ano-luz de distância (acontecimento $A$.

facilmente de mostra que o sinal atinge-a após 3.75 meses, tendo a Mariana percorrido nesse período 2.25 meses-luz. Se passados 6 messes após o primeiro sinal, Duarte enviasse um segundo sinal de radar à Mariana, que continuava a aproximar-se do Duarte, o segundo sinal atingiria a Mariana 3.75 meses após o primeiro (ver Tabela 1 adiante). Mais uma vez, estes seriam os tempos medidos pelos relógios do referencial do Duarte. No relógio (próprio) da Mariana, o intervalo entre os dois sinais seria realmente de 3 meses; como veremos adiante, os intervalos de tempo entre os sinais emitidos e os sinais recebidos estão relacionado pela fórmula (10), e no caso da Mariana estar a aproximar-se do Duarte com velocidade $v = 0.6$, o factor de Doppler seria $K' = 0.5$. Este valor $K' < 1$ implica uma redução do comprimento de onda. Note que os factores de afastamento, $K$, e de aproximação, $K'$, são inversos um do outro: $K' = 1/K$, para a mesma velocidade relativa (em módulo). Para apoiar o leitor na compreensão deste exemplo, no caso particular em que os gémeos se aproximam com uma velocidade relativa $v = 0.6$, vamos analisar 5 estádios dessa aproximação no quadro seguinte:

Consideremos novamente dois observadores inerciais em movimento re-

Tabela 1: Mariana aproxima-se do Duarte com $v = 0.6$

| Estádio | Tempo (meses) | Distância (mês-luz) | Acontecimento | Espaço percorrido (mês-luz) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | t=0.0 | 6.0 | início | 0.0 |
| 2 | t=3.75 | 3.75 | chega $1^o$ sinal | 2.25 |
| 3 | t=6.0 | 2.4 | partida $2^o$ sinal | 3.6 |
| 4 | t=7.5 | 1.5 | chegada $2^o$ sinal | 4.5 |
| 5 | t=10.0 | 0.0 | chegada da Mariana | 6.0 |

lativo, que podem continuar a ser o Duarte e a Mariana, e vejamos como podem determinar a sua posição relativa, velocidade e comparar os respectivos tempos usando o "método do radar". Duarte envia um sinal de radar, espera um intervalo de tempo $T$ do seu relógio (tempo próprio), e envia um segundo sinal. A Mariana mede um intervalo de tempo entre a recepção desses dois sinais como sendo $T' = KT$, de acordo com a Eq. (10). Para que fique bem claro, notemos que se a Mariana estivesse em repouso em relação ao Duarte, então teríamos $K = 1$, isto é, os intervalos de tempo seriam os mesmos para os dois observadores (ver gráfico à esquerda na figura 4). Neste caso, as suas linhas do Universo seriam paralelas. Mas se os observadores se afastam $K > 1$, e se os observadores se aproximam $K < 1$. Se soubermos a velocidade entre os 2 observadores facilmente poderemos determinar $K$, como veremos adiante. Na verdade, se os relógios da Mariana e do Duarte foram previamente acertados, quando a Mariana se cruzou com o Duarte, então a partir das coordenadas do acontecimento $C$ da figura 4 poderemos relacionar $K$ com a velocidade $v$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t_C &=& \frac{1}{2}(t_A + t_B) = \frac{1}{2}(K^2T + T) \\ x_C &=& \frac{1}{2}(t_B - t_A) = \frac{1}{2}(K^2T - T) \end{array} \right. \tag{11}$$

Logo, vem

$$v = \frac{x_C}{t_C} = \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad K = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}. \tag{12}$$

Note-se que daqui também se pode obter a fórmula da **dilatação do tempo**, comparando o tempo entre 2 acontecimentos que ocorrem no mesmo ponto do espaço de um dado observador, e em pontos do espaço diferentes do outro observador. Assim, $t'_C = T' = KT$ com $t_C = (K^2 + 1)T/2$ vem

$$\frac{t'_C}{t_C} = \frac{2K}{K^2 + 1} = \sqrt{1 - v^2},$$

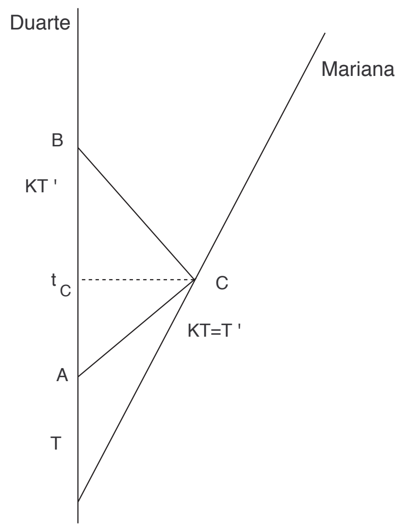


Figura 6: O Duarte envia um sinal de radar para Mariana, no instante $t_A$, e esta devolve-o imediatamente, assim que o recebe, no instante $t_C$ do relógio do Duarte. O sinal devolvido pela Mariana chega ao Duarte no instante $t_B$ do relógio dele.

e portanto,

$$T' = t\,\sqrt{1 - v^2}, \tag{13}$$

note-se que, neste caso, $T'$ é o tempo próprio medido pela Mariana na viagem de ida, e o $t$ é o tempo correspondente medido pelo Duarte.

Uma das formas mais práticas de medir a quantidade $K$ é através da medição do comprimento de onda (c.d.o.) da luz observada, ou de qualquer outra radiação electromagnética, desde que se conheça o c.d.o. da radiação emitida. Esta é a base das medidas de deslocamento para o vermelho da radiação emitida por um corpo que se afasta do observador.

Se um observador se afasta de nós, a Mariana por exemplo, e envia uma radiação de c.d.o. $\lambda_e$, vamos recebê-la com c.d.o. dado por

$$\lambda_o = K\lambda_e, \text{ onde } K > 1, \tag{14}$$

pois o período da radiação emitida é dado $\lambda_e = c\Delta\tau_e$, e a este período corresponde $\Delta\tau_o = K\Delta\tau_e$, para o período da radiação observada, de acordo com a eq.(10). Note que aqui voltámos a introduzir a velocidade da luz no vácuo, $c$, e portanto a distinguir as dimensões de espaço e de tempo.

Esta mudança de c.d.o. é fácil de medir directamente a partir do espectro da luz recebida. Pode fazer-se esta medida através da identificação no espectro observado de uma linha cujo c.d.o. é conhecido na fonte (como é o caso da 'linha $\alpha$' de c.d.o. 121.5 $nm$ do espectro do Hidrogénio), que depois é comparado com o c.d.o. recebido. Com frequência, o resultado da medida é expresso em termos do parâmetro do *deslocamento para o vermelho*,$z$, definido por

$$1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = K = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \tag{15}$$

Com este resultado ficamos a perceber que $K$, conhecido por **factor de Bondi**, em honra de Sir Hermann Bondi que introduziu este método, está directamente associado ao efeito de Doppler entre dois observadores inerciais em movimento relativo. À custa da troca de sinais de radar entre dois observadores em referenciais diferentes, é possível a qualquer deles conhecer a localização e o instante de acontecimentos da vida do outro observador, por muito distante que esteja. E desta forma é também possível pôr em evidência a dilatação do tempo, a contracção do espaço e até mesmo deduzir as transformações de Lorentz entre as coordenadas de dois referenciais. Este método de apresentar o formalismo da Relatividade Restrita é conhecido por *método do radar*.

Partindo da Eq. (15) é fácil mostrar que

$$\frac{v}{c} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2} < 1,$$

o que mostra que

$$v \to c \quad \text{quando} \quad z \to \infty.$$

# 'Paradoxo' dos Gémeos

O paradoxo dos gémeos (também conhecido por paradoxo de Langevin[6]) é uma "experiência de pensamento", esquematizada na figura (7), onde dois gémeos se separam num dado instante, iniciando um deles uma viagem a uma estrela distante, numa nave que se desloca a uma velocidade próxima da velocidade da luz ($v \approx 1$) e regressa logo em seguida à Terra. Ao encontrar-se com o seu gémeo que ficou na Terra verifica que este está muito mais velho, significando isto que o gémeo viajante envelhece mais lentamente.

Comecemos por esclarecer dois pontos sobre os quais se teceram, sobretudo na literatura mais antiga, muitas considerações erróneas que devem ser

[6] O "paradoxo dos gémeos"foi proposto por Paul Langevin e discutido pela primeira vez na Primeira Conferência Solvay, realizada em Breuxelas em 1911. Langevin anunciou uma simples "experiência de pensamento"que provava algumas das aparentes contradições da teoria da relatividade.

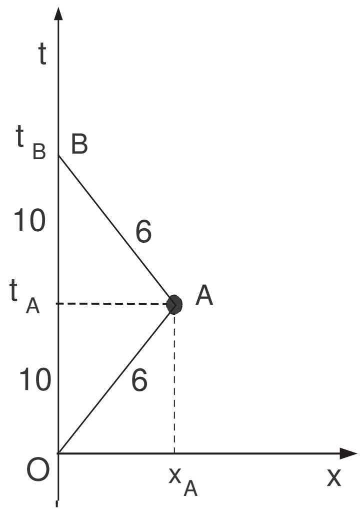


Figura 7: Dois gémeos separam-se no instante $O$, em que acertam os seus relógios um pelo outro, ficando um deles em repouso no referencial do laboratório (Terra), com coordenadas $(t, 0)$ enquanto o outro viaja, com velocidade $v = 0.8$ ($c = 1$), até uma estrela a 8 anos-luz da Terra, e no instante em que lá chega (acontecimento $A$) regressa de imediato ao mesmo ponto do espaço onde tinha ficado o primeiro gémeo (acontecimento $B$).

clarificadas desde o início. Em primeiro lugar, a questão em epígrafe não é de modo algum um paradoxo da teoria da relatividade, pois como veremos não há nenhuma violação do princípio da relatividade, contrariamente ao que se reclamava; e em segundo lugar não é necessário recorrer à teoria da relatividade geral para resolver este falso problema. Vejamos porquê. Estas duas críticas eram justificadas com os seguintes argumentos: sendo o movimento um conceito relativo, qualquer dos gémeos poderia admitir que estava em repouso no seu referencial e o outro em movimento. Claro, é contra o senso comum admitir que dois gémeos possam ter idade diferente! Porém, este argumento - que faz um apelo ao princípio da relatividade - é falacioso, pois os referenciais dos dois gémeos não são efectivamente equivalentes. Na verdade, não há simetria entre os dois gémeos pois um deles é considerado inercial (o que ficou na Terra) enquanto o viajante, o que vai e volta, sofre algures no seu trajecto uma aceleração para poder inverter o sentido da viagem e voltar à Terra. Só assim os dois gémeos se poderão voltar a encontrar depois de se terem separado. Descrevendo as trajectórias dos dois gémeos no espaço-tempo, o gémeo que ficou na Terra tem uma linha do Universo que é uma segmento de recta entre os dois acontecimentos, e o gémeo viajante tem uma trajectória curva ou uma linha que algures muda de direcção para poder voltar ao mesmo ponto do espaço. Em suma, a assimetria no cálculo do tempo dos gémeos é, em última análise, consequência de uma assimetria na trajectória do espaço-tempo percorrida por cada gémeo entre os dois acontecimentos.

Uma vez esclarecidos estes pontos, aparentemente controversos, retomemos o nosso exemplo para o analisar em pormenor (ver Fig.8). Sejam agora as nossas gémeas Patty e Selma Bouvier, as irmãs mais velhas de Marge Simpson. Admitamos que Patty fica cá na Terra enquanto Selma se desloca numa nave espacial, até um planeta distante (à procura do terceiro marido), com uma velocidade $v = 0.8$ ($c = 1$) em relação a Patty. Se Selma se afasta da Terra durante 6 anos do seu tempo próprio, $\tau$, então do ponto de vista de Patty, a viagem de ida ocorre num tempo dilatado, demorando

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{6}{\sqrt{1-0.8^2}} = 10\,\text{anos}.$$

Assim, de acordo com os observadores do referencial Terra, Selma afasta-se uma distância de 8 anos-luz. Com estes dados podemos escrever o intervalo do espaço-tempo para o par de acontecimentos (O,B), da figura (8),

$$\tau^2 = t^2 - x^2 \rightarrow 6^2 = 10^2 - 8^2,$$

que exprime a invariância da velocidade da luz (no vácuo). Note-se igualmente que, para a gémea viajante, o espaço percorrido é uma contracção do espaço medido por Patty, isto é,

$$x' = x\sqrt{1-v^2} = 8 \times 0.6 = 4.8\,\text{anos-luz}.$$

O que está em concordância com o tempo medido pelo relógio de Selma, onde só tinha passado $\tau = x'/v = 4.8/0.8 = 6$ anos.

Admitindo que esta regressa de imediato à Terra com a mesma velocidade $v = 0.8$ (em módulo), as duas gémeas voltam a encontrar-se passados 20(=16/0.8) anos, no referencial de Patty, após a partida de Selma, mas simplesmente $2 \times 4.8/0.8 = 12$ anos no relógio de Selma. Em resumo, as duas "gémeas"fazem agora uma diferença de 8 anos de idade, sendo Patty a mais velha. Este é sempre um resultado surpreendente, por muita familiaridade que tenhamos com a teoria da relatividade.

Continuando a nossa análise, vamos admitir que as duas gémeas estão munidas de potentes telescópios de modo a poderem observar os relógios de pulso uma da outra, para procurarem compreender em que medida o tempo é relativo. Assim, Selma vai observando o relógio de Patty ao longo da viagem e regista o valor observado no momento em que atinge o afastamento máximo

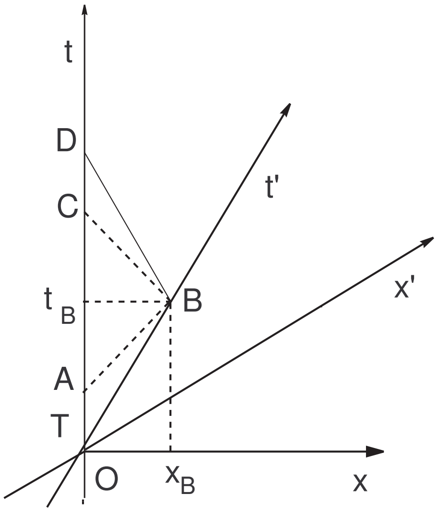


Figura 8: As duas gémeos separam-se no instante $O$, quando $t = t' = 0$; no instante $t_A = 2$ (anos) sai um sinal luminoso de Patty que chega a Selma no acontecimento B ($t'_B = 6$ anos). Este mesmo acontecimento B é visto por Patty no instante $t_C = K \times 6 = 18$ anos.

da Terra e inicia o seu regresso (acontecimento B, no diagrama da Fig.8). Atendendo ao efeito de Doppler, Selma vê o relógio de Patty marcar $t_A = 2$ anos, quando o seu relógio marca $t'_B = 6$ anos, pois

$$t' = Kt = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}t = 3 \times t,$$

e sendo $t' = 6$ anos, vem $t = 2$ anos. Por outro lado, Patty vê Selma atingir o acontecimento B, e a iniciar o regresso, quando o seu relógio marca 18 anos, pois para Patty, a sua gémea viajante leva 10 anos a atingir o planeta distante e a luz, com a imagem de Selma a chegar ao planeta, leva mais 8 anos a regressar à Terra, perfazendo assim os 18 anos. Para Patty o relógio de Selma, que marca 6 anos quando o seu marca 18, parece estar a trabalhar a um terço (6/18) da velocidade do seu relógio. Exactamente como acontece com Selma que vê o relógio de Patty trabalhar a um terço (2/6) da velocidade do seu.

Na sequência destas considerações, concluímos que se as duas gémeas mantivessem uma velocidade relativa constante, $v = 0.8$, afastando-se uma da outra indefinidamente em movimento uniforme, cada uma veria pelo telescópio o relógio da outra a atrasar-se a uma razão de 1 para 3. E neste caso haveria uma perfeita simetria entre as duas gémeas, bem como nas suas observações mútuas.

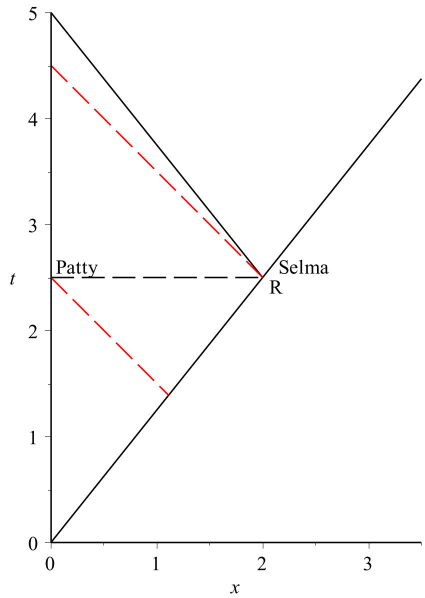


Figura 9: Nesta figura, uma unidade dos eixos é igual a 4 anos ou 4 anos-luz; Patty observa Selma pelo seu telescópio, nos seus instantes próprios $t_1 = 10, t_2 = 18$ (anos), quando no relógio de Selma são $t'_1 = 10/3, t'_2 = 6$ (anos), respectivamente.

De modo semelhante, também ocorreria uma perfeita simetria entre as duas gémeas se se aproximassem a uma velocidade constante $v = 0.8$, observando agora cada uma delas que o relógio da outra se adiantava a uma razão de 3 para 1. Efectivamente, vimos que na viagem de regresso, Patty vê o relógio de Selma passar de 6 anos para 12 anos em dois anos do seu relógio: intervalo de tempo, no relógio de Patty, entre a última observação de Selma e a sua chegada. (Fig.(9). Ou seja, Patty vê agora o relógio de Selma avançar 6 anos em 2 anos do seu tempo próprio, o que corresponde a uma velocidade três vezes maior. Por sua vez Selma vê, durante o seu regresso, o relógio de Patty avançar de 2 anos para 20 anos, enquanto o seu relógio marca um tempo próprio de seis anos. Selma é também levada a concluir que ela vê o relógio de Patty a trabalhar a uma velocidade três vezes maior do que o seu: 18/6. E ambas concordam que no fim da viagem, têm idades diferentes estando Patty 8 anos mais velha que Selma, a gémea viajante, que não teve tempo de encontrar o terceiro marido no planeta distante. A diferença de idades deve ser entendida como uma consequência da assimetria entre as duas gémeas: Patty ficou sempre no mesmo referencial (inercial) Terra, enquanto Selma teve que mudar de referencial e, por isso, o seu referencial próprio sofreu uma aceleração, logo Selma não é uma observadora inercial. Porém, quando analisadas separadamente, quer durante a ida quer durante a volta, as duas gémeas estão em referenciais perfeitamente equivalentes.

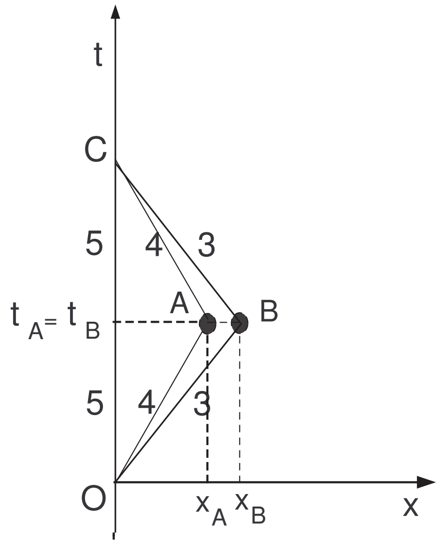


Figura 10: Nesta figura estão indicados dois caminhos possíveis para o gémeo viajante, conforme $v = 0.6$ ou $v = 0.8$. Nos 2 casos o gémeo que fica em repouso envelhece 10 anos, $t_A = t_B = 5$ anos, mas o gémeo viajante no primeiro caso, $\tau_A = 4$ anos, termina a viagem 2 anos mais novo, e no segundo $\tau_B = 3$ anos, termina 4 anos mais novo. Quanto maior é a velocidade, maior é o percurso espacial e menor o intervalo temporal.

## Resolução gráfica do paradoxo dos gémeos

Uma das lições da teoria da relatividade é que devemos pensar geometricamente sempre que possível. O método do radar, desenvolvido anteriormente, permite uma descrição gráfica do chamado paradoxo dos gémeos, muito sugestiva, a partir da qual se obtém imediatamente a idade do gémeo inercial em função da idade do gémeo viajante, desde que se conheça a velocidade deste último. Essa resolução gráfica do paradoxo, é particularmente adequada para aplicar a situações em que os diferentes gémeos viajantes, com diferentes velocidades, fazem todos a viagem em tempos próprios iguais, mas em tempos diferentes medidos pelo gémeo inercial. Esta é uma situação contrária ao que acontece na situação descrita na figura (10), onde os dois gémeos afastam-se durante o mesmo tempo medido na Terra, que é o referencial do gémeo inercial e, por conseguinte, com diferentes tempos próprios.

Vamos então aproveitar esta resolução para aplicar ao caso de dois gémeos viajantes com velocidades $v = 0.6$ e $v = 0.8$, respectivamente, que se afastam durante $t' = 3$ anos dos seus respectivos tempos próprios.

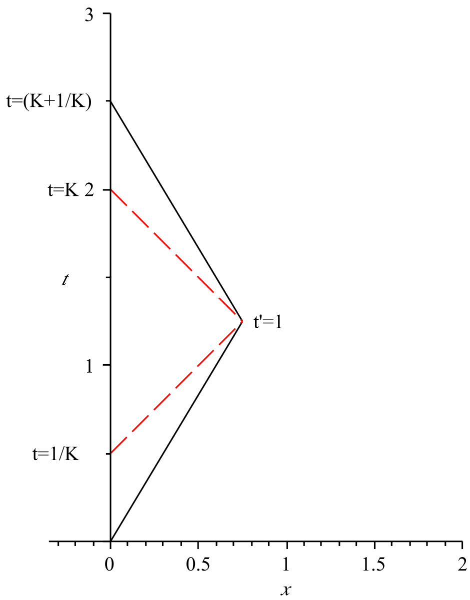


Figura 11: Resolução geométrica pelo método do radar: o gémeo viajante afasta-se durante o tempo $t'$ e regressa imediatamente com uma velocidade com o mesmo módulo. O factor $K$ depende da velocidade relativa entre o viajante e o gémeo terrestre. Neste gráfico $v = 0.6$ e, portanto, $K = 2$.

No gráfico da figura (11), onde se utiliza o método do radar, vemos com facilidade, que se o gémeo viajante se afasta durante o tempo próprio $t'$, fazendo a viagem de ida e volta num tempo $2t'$, então o gémeo que não viajou quando se reencontra com o viajante está $\Delta t = (K + 1/K)t' - 2t'$ mais velho. Vejamos como chegamos a esta conclusão. Se o gémeo que não viajou envia um sinal luminoso que chega ao gémeo viajante precisamente quando o viajante inicia o regresso, no instante $t'$ do viajante, como sabemos que $t' = Kt$ então o sinal foi enviado pelo gémeo terrestre em $t = K^{-1}t'$. Como fizémos $t' = 1$ ano, vem $t = 1/K$ ano, como está representado no gráfico da figura (gemeos1a). Por outro lado, se no instante do regresso o viajante envia um sinal luminoso para o gémeo inercial, sabemos que o sinal chega à Terra no instante $t = Kt' = K$. Pela simetria da figura deduz-se que o gémeo viajante chega à Terra $K + 1/K$ anos no referencial do gémeo terrestre. Em geral, o gémeo que ficou no referencial Terra, tomado como inercial, calcula um tempo de ida e volta $t = (K + 1/K) \times t'$, expresso na unidade de tempo em que estiver $t'$, que representa o tempo em que o viajante se afastou da Terra, medido no referencial do viajante. A diferença de idades é então $t - 2t'$.

No quadro que se segue apresentamos o resultado dos cálculos para os dois gémeos viajantes, que percorrem obviamente distâncias diferentes no mesmo tempo próprio mas em tempos diferentes do referencial do gémeo terrestre. O valor de $K$ em função de $v$ é dado na Eq. (12), já deduzida anteriormente.

Tabela 2: "Gémeos"com diferentes idades

| v | $K = \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\frac{1}{2}}$ | 2t' anos | (K+1/K)t' anos | x anos-luz |
|---|---|---|---|---|
| 0.6 | 2 | 6 | 7.5 | 2.25 |
| 0.8 | 3 | 6 | 10.0 | 4.0 |

Para fazer uma representação, no espaço-tempo, das trajectórias dos três gémeos, de modo a garantir que os dois gémeos viajantes se afastam durante o mesmo tempo, quando medido nos seus referenciais próprios, embora durante tempos diferentes, segundo o gémeo que ficou na Terra, temos de ter em conta que acontecimentos que estão à mesma "distância" da origem devem estar sobre o mesmo arco de hipérbole. Escolhendo o tempo próprio dos gémeos viajantes como $t' = 3$ anos, então as linhas do Universo dos dois gémeos começam ambas no acontecimento $O(t = 0, x = 0)$, na origem referencial Terra, e as suas extremidades, que representam os acontecimentos que marcam o início do regresso de cada um dos viajantes estarão sobre o ramo de hipérbole de equação $t^2 - x^2 = 3^2$.

Os pontos $A$ e $B$ da figura (12) representam os acontecimentos que marcam o regresso de cada um dos viajantes, e são determinados pelo sistema de equações

$$\text{Ponto } A\text{:} \begin{cases} t^2 - x^2 &= 9 \\ x - \frac{3}{5}t &= 0 \end{cases} \quad \text{Ponto } B\text{:} \begin{cases} t^2 - x^2 &= -9 \\ x - \frac{4}{5}t &= 0. \end{cases}$$

Resolvendo estes sistemas obtemos as coordenadas do ponto $A$ $(t = 3.75, x = 2.25)$ e as coordenadas do ponto $B$ $(t = 5, x = 4)$, relativamente ao referencial do gémeo terrestre, onde a figura (12) está representada, com o tempo em anos e o espaço em anos-luz. Observe que os pares de acontecimentos $(O, A)$

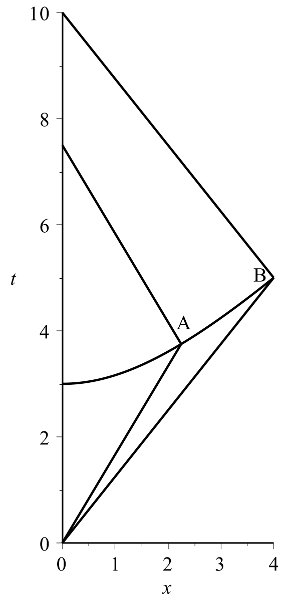


Figura 12: Os gémeos viajantes afastaram-se durante $t' = 3$ anos, um com $v = 06$ e outro com $v = 0.8$, e regressam imediatamente com velocidades com o mesmo módulo. O tempo é medido em anos, e o espaço em anos-luz. Note que estas unidades são idênticas quando $c = 1$.

e $(O, B)$ satisfazem, respectivamente, as relações

$$3^2 = (3.75)^2 - (2.25)^2, \quad 3^2 = 5^2 - 4^2,$$

por construção, pois os acontecimento $A$ e $B$ pertencem ao ramo de hipérbole $t^2 - x^2 = 3^2$. Isto significa que a "distância" no espaço-tempo entre os acontecimentos $O$ e $A$, ao longo do segmento de recta que os une, é igual à "distância" nas mesmas condições entre $O$ e $B$. Talvez o leitor já não fique surpreendido quando verificarmos adiante que as trajectórias curvas (movimentos acelerados que unem os $O$ e $A$ ou $O$ e $B$ são sempre mais curtas que a trajectória rectilínea, que representa o movimento uniforme (inercial). Aproveitemos este exemplo para salientar que quanto maior é a velocidade do observador ou partícula, maior terá que ser o espaço percorrido de modo a garantir a mesma "distância" no espaço-tempo. Em vez de fixar o tempo próprio do gémeo viajante, poderíamos antes fixar o tempo próprio do gémeo que ficou na Terra. Considerando novamente as situações em que os viajantes seguem com velocidades $v = 0.6$ e $v = 0.8$, e se em ambos os casos a viagem durar 10 anos para o gémeo terrestre, então no primeiro caso, o gémeo viajante afasta-se uma distância de 3 anos-luz num tempo próprio de

4 anos, e no segundo caso, o gémeo viajante afasta-se 4 anos-luz num tempo próprio de 3 anos, ver figura (10).

Pode parecer estranho que um viajante que se desloca com velocidade $v = 0.8$ durante 3 anos possa percorrer um espaço de 4 anos-luz; ou seja, mais do que a própria luz, que nesse período percorre só 3 anos-luz. A confusão desfaz-se quando se percebe que os 4 anos-luz são medidos pelo o observador na Terra. O espaço correspondente, quando calculado pelo viajante com velocidade $v = 0.8$ reduz-se a 2.4 anos-luz, claramente inferior ao espaço percorrido pela luz no mesmo tempo. É, aliás, seguindo um raciocínio semelhante que se pode mostrar que a Via Láctea, com um diâmetro de cerca de 100 000 anos-luz poderá ser atravessada de uma ponta à outra por um viajante capaz de viajar a $v = 0.9950$, ou seja 99.5% da velocidade da luz, em menos de dez mil anos. Mais uma vez se destaca o facto da contracção do espaço e da dilatação do tempo serem duas faces da mesma moeda.

## Paradoxo dos Gémeos num Referencial com Aceleração Própria Constante

### Movimento Hiperbólico

Tendo em conta as transformações das componentes da aceleração, $\mathbf{a}$, que se obtêm-se facilmente por derivação da lei de transformação das componentes da velocidade $(v_x, v_y, v_z)$, é possível mostrar que as componentes de $\mathbf{a}$ em dois referenciais $S$ e $S'$, com os eixos paralelos e uma velocidade relativa $v$ alinhada com o eixo do $xx$, estão relacionadas pelas expressões

$$\begin{aligned} a_x &= \Gamma^3 a'_x, \quad \Gamma = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+uv'_x} \\ a_y &= \Gamma^2 \left[ a'_y - \frac{v'_y u}{1+uv'_x} a'_x \right] \\ a_z &= \Gamma^2 \left[ a'_z - \frac{v'_z u}{1+uv'_x} a'_x \right] \end{aligned} \tag{16}$$

Note, em particular, que $\mathbf{a}$ não depende só de $\mathbf{a}'$ mas também de $\mathbf{v}'$, i.e., a um movimento uniformemente acelerado em $S'$ $(\mathbf{a}' = \mathbf{const.}, \mathbf{v}' = \mathbf{a}'t')$ não corresponde um movimento uniformemente acelerado em $S$. Portanto, ao contrário da mecânica newtoniana, o conceito de movimento uniformemente acelerado depende do referencial.

*Aceleração Própria*

Seja $S$ o referencial do Laboratório e consideremos um ponto $\mathcal{P}(t, \mathbf{r})$ da linha do Universo duma partícula material acelerada em relação a $S$. Seja $S_0$ o referencial inercial dum observador $\mathcal{O}$, instantaneamente em repouso em relação à partícula no ponto $\mathcal{P}(t, \mathbf{r})$.

A velocidade de $S_0$ em relação a $S$ é $\mathbf{u} = \mathbf{v(t)}$, i.e., $\mathbf{u} = \mathbf{const}$. é igual à velocidade da partícula em relação a $S$ no instante $t$. Representemos por $\mathbf{a}_0$ a velocidade da partícula em $S_0$. A mecânica relativista deverá reduzir-se à mecânica newtoniana quando $v \ll 1$. Assim, o observador $\mathcal{O}$ ligado ao referencial $S_0$ poderá aplicar as leis da mecânica newtoniana para determinar a aceleração no ponto $\mathcal{P}(t, \mathbf{r})$ de $S$, i.e., na origem do seu referencial, onde a lei fundamental da dinâmica newtoniana permite escrever: $\mathbf{f}_0 = m\mathbf{a}_0$.

Conhecendo o valor da aceleração no referencial comóvel $S_0$, ou seja, $\mathbf{a}_0$, podemos determinar $\vec{a}$ em $S$ por intermédio das fórmulas (16), tendo em atenção que: $S' \equiv S_0, \mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{u}$; neste caso $K$ reduz-se a $\sqrt{1 - v^2} = \gamma^{-1}(v)$, e vem

$$\begin{aligned} a_x &= a_{0x}(1 - v^2)^{3/2}, \\ a_y &= a_{0y}(1 - v^2), \\ a_z &= a_{0z}(1 - v^2). \end{aligned} \tag{17}$$

Estas fórmulas são válidas para um ponto $\mathcal{P}$ da linha do Universo da partícula, e a cada ponto $\mathcal{P}$ é preciso fazer corresponder um referencial $S_0$ diferente, mas com os eixos semelhantemente orientados a $S$, e escolhidos de tal modo que a velocidade da partícula, $\mathbf{v}$, esteja dirigida segundo o eixo dos $xx$.

Se nos restringirmos a um movimento unidireccional, por exemplo, ao longo do eixo dos xx, podemos definir a **aceleração própria** da partícula, $a = a_{0x}$, como sendo a aceleração da partícula em relação ao seu referencial instantaneamente comóvel,

$$\alpha = (1 - v^2)^{-3/2}\frac{dv}{dt}, \tag{18}$$

sendo $dv/dt$ a aceleração da partícula em relação ao referencial do laboratório. É possível encontrar dois (ou mais) referenciais inerciais $S$ e $S'$, tais que a direcção do movimento relativo coincida com a da partícula, e para os quais se tenha

$$\alpha = (1 - v^2)^{-3/2}\frac{dv}{dt} = (1 - v'^2)^{-3/2}\frac{dv'}{dt'}, \tag{19}$$

ou seja, a aceleração própria da partícula é a mesma nos dois referenciais. Quando uma partícula se desloca rectilineamente de tal modo que a sua aceleração própria é constante em relação aos sucessivos referenciais inerciais onde a partícula está instantaneamente em repouso, consideramos que se trata de um movimento 'uniformemente acelerado"em relatividade restrita.

Concretamente, consideremos um nave espacial que parte da Terra numa direcção que tomamos como o eixo dos xx do referencial ligado à Terra, com uma aceleração própria constante $a_{0x} = \alpha$ e mantendo uma trajectória rectilínea. No instante inicial $t = 0$, medido em $S$ (referencial inercial ligado à Terra), temos: $x = 0, v = 0$, e $a_{0x} = \alpha$. Ao fim de um certo tempo $t$ temos

$$a = \frac{dv}{dt} = \alpha \left(1 - v^2\right)^{3/2}$$

ou seja,

$$\frac{dv}{(1 - v^2)^{3/2}} = \alpha dt, \quad 0 \ll v < 1,$$

onde $v$ é a velocidade em $S$ do referencial inercial instantaneamente comóvel com a partícula.

Fazendo a substituição de variáveis: $v = \tanh \phi$, a Eq. anterior toma a forma

$$\cosh \phi d\phi = \alpha dt,$$

cuja integração dá

$$\sinh \phi = \alpha t,$$

atendendo às condições iniciais.

Para encontrar as equações paramétricas da curva descrita pela partícula no espaço-tempo de Minkowski, devemos obter agora $x$ em função do parâmetro $\phi$. Como $dx/dt = \tanh \phi$, vem

$$dx = \tanh \phi \alpha^{-1} \cosh \phi d\phi,$$

o que dá lugar a

$$\cosh \phi = \alpha x + 1,$$

atendendo novamente às condições iniciais $(x = 0, \phi = 0)$.

As equações paramétricas do movimento de uma partícula acelerada, com aceleração própria constante $\alpha$, são

$$\begin{aligned} t &= \alpha^{-1} \sinh \phi, \\ x &= \alpha^{-1} (\cosh \phi - 1) . \end{aligned} \tag{20}$$

O sistema de Eqs.(20) representa uma hipérbole no espaço-tempo de Minkowski. Quando $t \to \infty \, (\phi \to \infty, \tanh \phi \to 1) : v \to 1$. Para velocidades $v \ll 1$, i.e., $\phi \ll 1$ temos

$$x \simeq \frac{\phi^2}{2\alpha}, \quad t \simeq \frac{\phi}{\alpha} \Rightarrow x \simeq \frac{1}{2} \alpha t^2,$$

que corresponde ao movimento parabólico que se esperava.

Voltando ao sistema de Eqs. (20), e fazendo uma translação da origem

$$x \mapsto x = x + \frac{1}{\alpha}$$

podemos escrever as equações paramétricas na forma seguinte

$$\begin{aligned} t &= \alpha^{-1} \sinh \phi, && (21) \\ x &= \alpha^{-1} \cosh \phi. && (22) \end{aligned}$$

Nestas novas coordenadas inerciais, a equação que descreve a curva do espaço-tempo do nave espacial com aceleração própria $\alpha$ obtém-se por eliminação do parâmetro $\phi$

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{\alpha^2}. \tag{23}$$

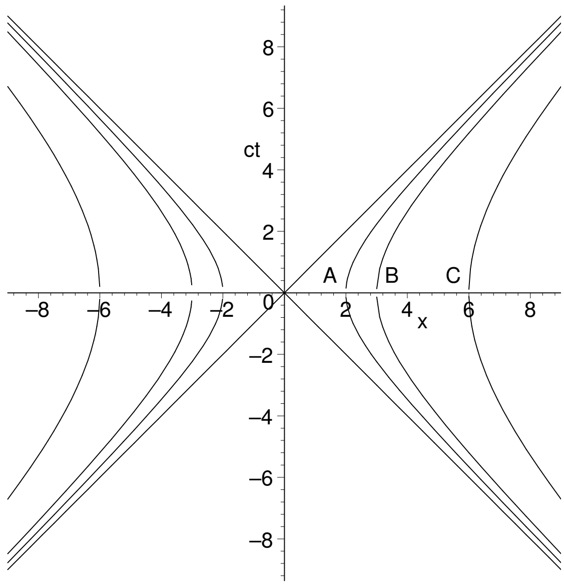


Figura 13: Movimentos Hiperbólicos para os valores de $\alpha = 1/2, 1/3, 1/6\ ano^{-1}$, respectivamente para os ramos de hipérbole $A, B, C$.

Trata-se da equação de uma hipérbole, como se vê na figura junta, com assímptotas $x = \pm t$, correspondentes às linhas do Universo dos fotões. Neste sentido, diz-se que a aceleração própria dos fotões é $\alpha = \infty$.

Vejamos agora qual o significado do parâmetro $\phi$. Recordando como foi introduzida a variável $\phi$, através da equação $v = \tanh(\phi)$ e tendo em conta a Eq.(22), vemos que $\phi$ é proporcional ao tempo próprio $\tau$ do nave espacial, pois

$$d\tau = dt\gamma^{-1}(v) = dt\sqrt{1-v^2} = \frac{1}{\alpha}d\phi,$$

e se admitirmos que o relógio de bordo da nave espacial marca $\tau = 0$ quando $t = 0$, vem

$$\tau = \int_0^t dt\sqrt{1-v^2} = \int_0^\phi \frac{1}{\alpha}d\phi = \alpha^{-1}\phi. \tag{24}$$

Em resumo, podemos afirmar que em RR, o mais próximo de um movimento uniformemente acelerado é um movimento com aceleração própria, $\alpha$, constante; ou seja, no seu movimento acelerado a partícula vai passando por sucessivos referenciais inerciais, e a taxa de variação da sua velocidade relativamente aos sucessivos referencias é constante. A trajectória (linha do Universo) da partícula no espaço-tempo é um ramo de hipérbole, definido pela Eq. (23). Os ramos de hipérboles contidos no primeiro quadrante da figura (13) representam trajectórias de partículas com diferentes acelerações próprias, que partem do repouso e se afastam no sentido positivo do eixo do $xx$. Os correspondentes ramos contidos no $4^o$ quadrante, representam trajectórias de partículas em desaceleração.

*Referencial próprio do gémeo "uniformemente acelerado"*

Uma vez feita esta introdução, consideremos um gémeo com aceleração própria constante, que por simplificação chamamos 'gémeo uniformemente acelerado', o Abel, e admitamos que ele parte do repouso com uma aceleração própria $\alpha = 0.5g$ (sendo $g = 9.8$ m/s$^2$). No mesmo instante, e no mesmo local em $x = 2$, parte o gémeo inercial, o Bernanrdo, com velocidade $v = 0.6c$. Tomando $c = 1$, vem $g \simeq 1\, ano^{-1}$ (fazendo $c = 1$, a aceleração tem as dimensões do inverso do tempo).

Observando a figura (14) vemos que os dois gémeos têm trajectórias no espaço tempo que descritas pelas equações

$$t = \frac{5}{3}(x-2) \quad \text{(gémeo inercial)} \tag{25}$$

$$x = x^2 - t^2 = 4 \quad \text{(gémeo 'uniformemente acelerado')}. \tag{26}$$

Facilmente se verifica que estas duas curvas se cruzam em dois pontos (acontecimentos) do espaço-tempo: ponto $A$, de coordenadas (t=0, x=2), e ponto $C$, de coordenadas (t=3.75, x=4.25), sendo $t$ e $x$ as coordenadas do laboratório (LAB), onde estão a ser estudados os movimentos dos dois gémeos.

A Eq. (26) pode ser substituída pelo sistema de equações

$$\begin{cases} t = 2\sinh(\tau/2) \\ x = 2\cosh(\tau/2) \end{cases}$$

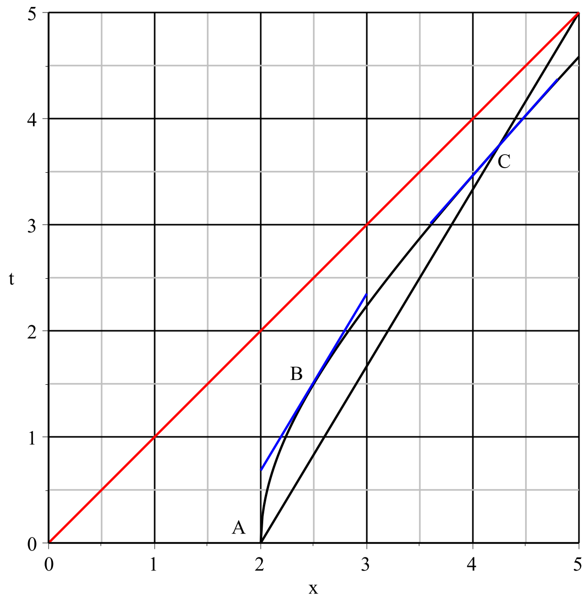


Figura 14: Os 2 gémeos partem simultaneamente do ponto $A$, $x = 2$ ano-luz, no sentido positivo do eixo do $x$, que supomos representar a direcção da vertical do lugar. Inicialmente o Bernardo afasta-se do Abel, mas este segue em perseguição de Bernardo até que Abel se cruza com Bernardo no ponto $C$ e ultrapassa-o. Comparando os respectivos tempos próprios conclui-se que A está mais novo que B no momento em que se cruzam.

onde $\tau$ é o tempo próprio do gémeo com aceleração própria constante $\alpha = 0.5\ ano^{-1}$. A velocidade deste gémeo é dada por $v = \tanh(\alpha\tau)$, sendo nula quando $\tau = 0$, quando os dois observadores se cruzam pela primeira vez. O segundo encontro dos dois gémeos verifica-se quando $t = 3.75$ anos e $x = 4.25$ ano-luz (coordenadas LAB), é o acontecimento $C$ da figura (14). Como $\alpha\tau = \sinh^{-1}(\alpha t)$, segundo Eqs. (22,24), imediatamente se determina que $\tau = 2.77$ anos. E a velocidade atingida pelo gémeo acelerado nesse instante é $v = \tanh(2.77/2) = 0.88$. Observando a figura (14), vemos que o acontecimento $B$ ocorre no instante $\alpha\tau = \tanh^{-1}(0.6) = 0.693$, ou seja, quando o gémeo acelerado atinge a velocidade do gémeo inercial, e $\tau = 1.385$ anos, que corresponde ao instante $t = 2 \times \sinh(1.385/2) = 1.5$ anos do LAB. Igualmente se determina que a posição deste acontecimento é $x = 2 \times \cosh(1.385/2) = 2.5$ ano-luz. Em conclusão, ao fim de um ano e meio, medido no LAB, o gémeo acelerado percorreu meio ano-luz e a sua velocidade atingiu o mesmo valor do gémeo inercial, $v = 0.6$.

Descrevendo esta situação do ponto de vista do referencial do gémeo 'uniformemente acelerado', diremos que este vê o outro gémeo a afastar-se segundo um movimento 'ascensional', com uma velocidade decrescente que se anula precisamente no acontecimento $B$, ponto de maior distância entre os dois gémeos, $\Delta x = 0.9$ ano-luz, a partir do qual se inicia a queda do outro gémeo que se completa quando $\tau = 2.77$ anos. É interessante notar que o movimento ascensional e o movimento de queda duram exactamente o mesmo tempo neste referencial acelerado. Finalmente falta comparar os tempos próprios dos dois gémeos. O tempo próprio do Bernardo é obtido a partir do tempo da viagem calculada no LAB, tendo em conta a dilatação do tempo que aí é observada,

$$\begin{aligned} \text{Bernardo:} \quad \Delta\tau_B &= \Delta t\sqrt{1 - v^2{}_B} = 3.75 \times 0.8 = 3\,\text{anos.} \\ \text{Abel:} \quad \Delta\tau_A &= \frac{1}{\alpha}\sinh^{-1}(\alpha \times 3.75) = 2.72\,\text{anos.} \end{aligned}$$

Em conclusão: $\Delta\tau_A < \Delta\tau_B$, o gémeo 'uniformemente acelerado' está mais novo que o seu gémeo inercial no momento em que se encontram pela segunda vez. Este exemplo mostra que num espaço-tempo de Minkowski (espaço-tempo plano), as trajectórias geodésicas são sempre as mais longas. Porém, num espaço-tempo curvo isto não é necessariamente assim!

## O paradoxo dos gémeos num campo gravítico

A discussão do paradoxo dos gémeos complica-se na presença de um campo gravítico. Vamos abordar este problema num caso particularmente simples: num campo estático e com simetria esférica, como é o campo gravítico da Terra ou o do Sol. Para isso vamos comparar o tempo (próprio) medido por um observador estacionário com o tempo (próprio) medido por um observador numa órbita circular kepleriana, isto é, num movimento livre, não acelerado, ou seja: um movimento geodésico. Na verdade, no contexto da relatividade geral, a gravidade não é uma força, e que uma partícula material livre deve seguir uma trajectória geodésica do espaço-tempo nesta geometria.

Vamos aqui admitir, que o corpo central que cria o campo gravítico, isto é, a massa, $M$, responsável pela criação desta geometria, ou seja, pela deformação do espaço-tempo, é um buraco negro, pois isso permite-nos considerar órbitas mais próximas da massa central. No caso geral o tempo próprio de uma partícula livre que se desloca no espaço-tempo criado por esta massa, é dado por

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2), \qquad (27)$$

onde a coordenada radial, $r$, está relacionada com a distância radial ao centro da massa, $t$ representa o tempo próprio dos observadores infinitamente afastados da massa, $m = GM/c^2$. Neste caso $m$ tem dimensões de comprimento. Aliás se também igualarmos à unidade a constante universal de Newton, $G = 1$, vem $m = M$. Uma rápida análise da expressão (27) mostra que $d\tau$ se torna singular quando a coordenada radial $r$ toma o valor

$$r_S = 2m = \frac{2MG}{c^2},$$

conhecido por raio de Schwarzschild, que nos dá uma ideia da dimensão do buraco negro associado à massa $M$, admitindo por hipótese que a referida massa sofreu um colapso gravitacional. Por exemplo, o raio de Schwarzschild do Sol é

$$r_S = \frac{2M_\odot G}{c^2} = 2.95 \text{ km}.$$

Podemos simplificar bastante se admitirmos que só queremos estudar órbitas circulares no plano equatorial ($\theta = \pi/2$). Nestas condições a expressão (27) reeduz-se a

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - r^2 d\varphi^2 = d\tau_*^2 - d\ell^2, \tag{28}$$

onde $\tau_*$ é o tempo próprio de um observador estacionário, isto é, de um observador com coordenadas espaciais $r = const.$ e $\varphi = const.$ Note que diferentes observadores estacionários medem diferentes tempos próprios, pois

$$d\tau_* = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} dt. \tag{29}$$

O desvio gravitacional para o vermelho de uma radiação monocromática enviado por um observador colocado em $r_1$ para outro em $r_2 > r_1$ é uma consequência desta relação,

$$\frac{\Delta\tau_*(r_2)}{\Delta\tau_*(r_1)} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2m}{r_2}}{1 - \frac{2m}{r_1}}} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} > 1.$$

O campo gravítico associado à geometria descrita pelas Eqs. (27) ou (28), por ser um campo estático e esfericamente simétrico tem duas constantes de movimento, a uma energia por unidade de massa, $E$, e a um momento angular por unidade de massa, $L$, definidas pelas equações

$$(1 - \frac{2m}{r}) \frac{dt}{d\tau} = E \tag{30}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = L, \tag{31}$$

sendo $E$ e $L$ quantidades que se conservam, por definição, ao longo das trajectórias geodésicas. Por outro lado, da Eq. (28) obtemos,

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 - r^2\dot{\varphi}^2,$$

conhecida por condição de normalização (para partículas materiais). Das equações das geodésicas para trajectórias circulares ($\dot{r} = 0$), obtém-se a equação

$$m\dot{t}^2 = r^3\dot{\varphi}^2, \tag{32}$$

que juntamente com as equações de definição das constantes de movimento permite chegar à relação

$$E^2 = \frac{(1 - 2m/r)^2}{1 - 3m/r}.$$

Introduzindo este resultado na equação de definição, Eq.(30), vem imediatamente,

$$d\tau = \left(1 - \frac{2m}{2}\right) E^{-1} dt = \sqrt{1 - \frac{3m}{r}}\, dt. \tag{33}$$

Posto isto, consideremos agora dois gémeo, em que o gémeo A é um observador estacionário neste campo gravítico, com $r = const.$, e o gémeo B descreve uma órbita geodésica circular, com $r = const.$, em torno da massa $m$, que cria o campo gravítico, e passando pela posição onde se encontra o gémeo estacionário A. Ao fim de uma volta do gémeo B na sua órbita, vemos por integração da Eq.(32), que passou um intervalo de tempo

$$\Delta t = 2\pi \left(\frac{r^3}{m}\right)^{1/2},$$

para os observadores infinitamente afastados, sendo o tempo próprio do observador estacionário, gémeo A, dado em função deste valor por

$$\Delta\tau_* = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}\,\Delta t,$$

e sendo o tempo próprio do observador geodésico, gémeo B,

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{3m}{r}}\,\Delta t.$$

Destas expressões é óbvio que $\Delta\tau < \Delta\tau_*$, donde se conclui que o gémeo estacionário envelhece mais depressa do que o gémeo viajante que percorre uma órbita circular. Este resultado vem confirmar a situação anteriormente descrita para os gémeos no quadro da RR, onde o gémeo viajante também retorna mais novo. No entanto, há um aspecto desta história que parece estar em contradição com a RR. Ao contrário do que acontece na RR, aqui o gémeo viajante, gémeo B, tem uma trajectória geodésica - a órbita circular, enquanto o gémeo A, que se encontra fixo, está sujeito a uma aceleração - que o impede de cair no campo gravítico - dada pela expressão,

$$a = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{m}{r^2},$$

que é função da sua posição no campo $r$ e da massa, $m$, que o cria. Note que esta aceleração se torna infinita para $r = 2m$, na fronteira de um buraco negro! Em resumo, também no campo gravítico escolhido, e nas condições dadas, o gémeo viajante chega mais novo, mas ao contrário da RR, é o gémeo viajante que é geodésico, enquanto que o gémeo que permaneceu no mesmo local, manteve-se sempre acelerado durante toda a experiência, e por isso percorreu um maior caminho no espaço-tempo, tornando-se mais velho que o seu gémeo viajante.

# Velocidades maiores que a velocidade da luz

Ainda no contexto das viagens no espaço-tempo com 2 gémeos, um inercial e outro acelerado, descrevendo uma trajectória curva no espaço-tempo, mas de modo a permitir-lhe regressar ao ponto inicial do espaço onde se encontra o gémeo inercial, vamos incluir também sinais com velocidades superiores à da luz (ver figura 15), vulgarmente conhecidos por sinais taquiónicos. O termo taquião - que em Grego significa rápido - designa uma partícula hipotética que viaja mais rapidamente do que a luz. Contrariamente ao que se afirma em muitos textos introdutórios de relatividade restrita, a sua existência não viola esta teoria, embora seja necessário modificar algumas das noções tradicionais de causalidade, como veremos adiante. A existência de velocidades superiores à velocidade da luz no vácuo, $v > c$ é permitida pela teoria da relatividade restrita, mas desde que se admita que essas velocidades são superiores a $c$ em todos os referenciais; assim, não é possível reduzir a velocidade de um taquião de modo que $v \leq c$, e tal como no caso dos fotões não podemos imaginar referenciais físicos onde os taquiões possam estar parados!

Mas analisemos a figura 15 com algum pormenor. Nela estão representadas as trajectórias de espaço-tempo de dois gémeos. Cada unidade do gráfico representa 15 minutos ou 15 minutos-luz. Recordemos que a velocidade da luz no vácuo, $c$ é feita igual à unidade, o que implica que a dimensão de espaço

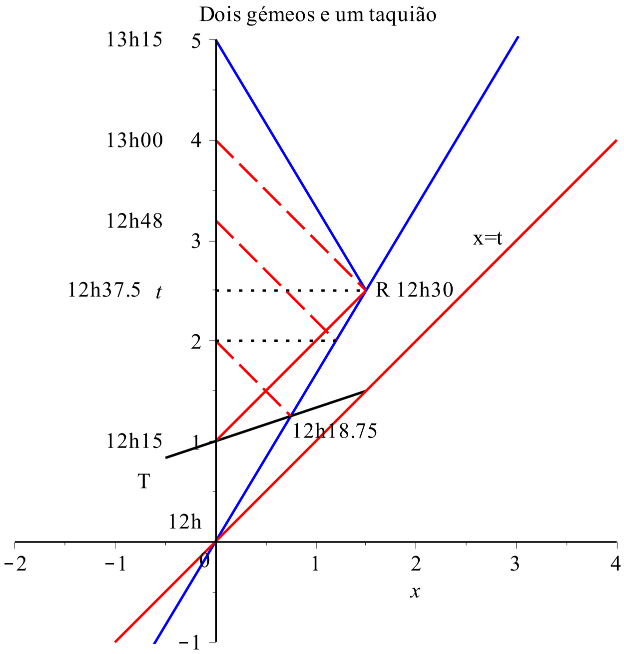


Figura 15: Esta figura representa dois gémeos que se separam ao meio-dia (12 horas), tendo sincronizado os seus relógios nesse instante. Quinze minutos depois, o gémeo que está parado na Terra envia um sinal luminoso e nesse instante passa por ele um sinal taquiónico em direcção ao gémeo viajante. Esse encontro do taquião com o gémo terrestre é visto pelo viajante às 12h30 do relógio do viajante.

e a dimensão de tempo são a mesma dimensão. Admitamos que os gémeos se separam ao meio-dia (12 horas), tendo sincronizado os seus relógios no instante da separação, e que um deles está em repouso no referencial Terra, e o outro se afasta da Terra com uma velocidade constante, $v = 0.6$, até um local distante (a cerca de 405 milhões de quilómetros), uma distância muito superior à distância Terra-Sol ($149.6 \times 10^6$ km)! Quinze minutos depois, o gémeo que está parado na Terra envia um sinal luminoso. Nesse mesmo instante passa por ele um sinal taquiónico, em direcção ao gémeo viajante. Ao intervalo de quinze minutos, entre o instante inicial e a partida do sinal luminoso, corresponde, no referencial do viajante, um intervalo de 30 minutos, entre o ponto de partida e a chegada desse mesmo sinal luminoso, visto que $\Delta t' = K\Delta t, K = 2$. Os dois acontecimentos, que definem este intervalo, são registados pelo gémeo terrestre como estando separados por 37.5 minutos; a distância percorrida pelo viajante, nesse tempo, é $d = 0.6 \times 37.5 = 22.5$ minutos-luz. Sempre que recebe um sinal taquiónico, o gémeo viajante envia um sinal luminoso para a Terra, e faz o mesmo também quando recebe um sinal luminoso. O taquião representado na figura tem uma velocidade $u = 3$, igual a três vezes a velocidade da luz no vácuo, de modo que se ele passa, pelo gémeo em repouso na Terra, pelas 12h15, em direcção ao gémeo viajante, é fácil verificar que o taquião vai cruzar-se com o viajante 3.75 minutos depois, tendo viajado uma distância de 11.25 minutos-luz.

No momento em que o taquião e o viajante se cruzam, este envia um sinal luminoso para o seu gémeo terrestre, chegando esse sinal precisamente às 12h30. Por outras palavras, o gémeo viajante envia para o seu gémeo terrestre a informação da passagem do taquião. Essa informação permite ao gémeo terrestre ver o taquião cruzar-se com o viajante pelas 12h30. Por outro lado, o sinal luminoso enviado pelo gémeo terrestre, quando o taquião passou por ele, chega ao gémeo viajante precisamente às 12h30 do relógio do viajante. Assim, de acordo com o gémeo terrestre o taquião passa por ele às 12h15 e é visto a passar pelo seu gémeo viajante às 12h30, portanto mais tarde; mas já o gémeo viajante vê o taquião passar por ele primeiro, às 12h18.75, e a cruzar-se com o gémeo terrestre às 12h30, do seu relógio, mais tarde também. Para tornar mais óbvia esta contradição, imagine-se que o taquião sofre durante o seu caminho, entre o gémeo terrestre e o gémeo viajante, alguma transformação que possa ser entendida como um envelhecimento . O que acabámos de descrever implica que enquanto o gémeo terrestre vê o taquião envelhecer normalmente, o gémeo viajante vê o taquião rejuvenescer. Isto é um sintoma claro da existência de paradoxos associados às velocidades $u > c$.

Na formulação da Relatividade Restrita a energia, $E$, e o momento linear, $\mathbf{p}$, de uma partícula são dados por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

em que $m$ é a massa (própria) da partícula, $c$ é a velocidade da luz e $v$ é a velocidade da partícula no referencial do observador. Ora, aqui surge uma segunda dificuldade ao lidar com taquiões; de acordo com estas equações, vemos que tanto $E$ como $p$ tornam-se imaginárias quando $v > c$. A melhor forma de $E$ e $p$ se tornarem reais é admitir que a massa dos taquiões é imaginária. Na verdade, postulando $\mu = im$, com $i = \sqrt{-1}$, o problema fica aparentemente ultrapassado. Assim, representando por $u$ a velocidade do taquião, e voltando a escolher um sistema de unidades onde $c = 1$, escrevemos a energia e o momento de um taquião da forma seguinte

$$E = \frac{\mu}{\sqrt{u^2 - 1}}, \quad p = \frac{\mu u}{\sqrt{u^2 - 1}},$$

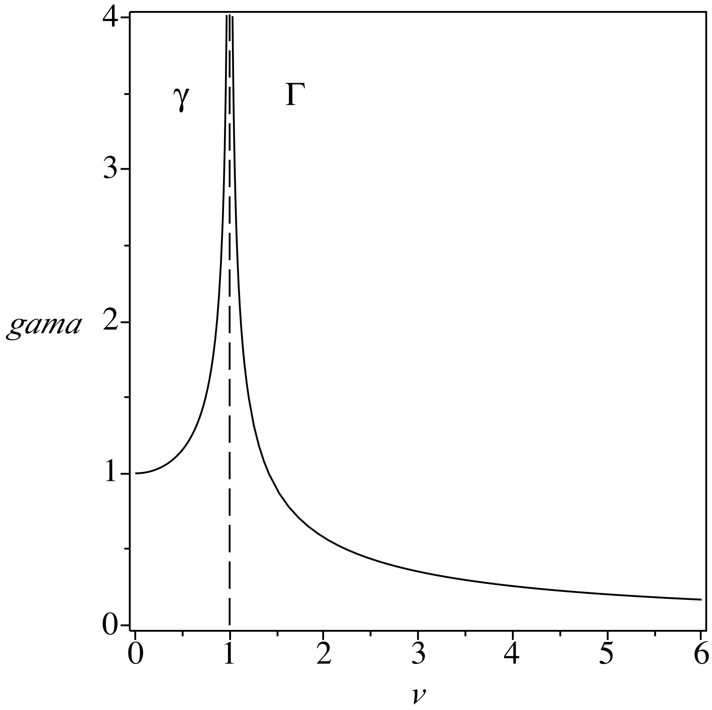


Figura 16: Comportamento dos factores $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, e $\Gamma = 1/\sqrt{u^2-1}$ para as partículas sub-luminais ($v < 1$) e para os taquiões ($u > 1$), respectivamente.

com $u > 1$. A relação fundamental da dinâmica relativista toma agora a forma

$$E^2 = p^2 - \mu^2.$$

Enquanto que para as partículas subluminais a energia e o momento linear são funções crescentes de $v$ no domínio $0 < v < 1$, para os taquiões estas grandezas são funções decrescentes em $1 < u < \infty$; isto diz-nos algo de surpreendente acerca destas hipotéticas partículas, quanto maior é a velocidade menor é a energia, como se vê no gráfico da figura 16.

Fica assim resolvido, no âmbito da teoria da relatividade restrita, o chamado "paradoxo" dos gémeos. De caminho foi possível apreciar a interligação entre dilatação do tempo e contracção do espaço, e o efeito de Doppler entre dois observadores em movimento relativo, tendo-se introduzido para isso o chamado 'método do radar', onde os observadores trocam entre si sinais electromagnéticos, que lhes permitem assim pôr em evidência a relatividade do tempo e suas consequências.

**Sugestões de Leitura**


- Barbour, Julian, *The End of Time*, Phoenix, 1999.
- Carroll, Sean, *From Eternity to here*, A Plume Book, 2010.
- Crawford, P e Simões, A.I., "Tempo e Relatividade I", *Gazeta de Física*, **9**, Fasc. 2, 36-40, Abril 1986. "Tempo e Relatividade II", *Gazeta de Física*, **9**, Fasc. 3, 49-56, Abril 1986.
- Crawford, Paulo, "O Significado da Relatividade no Final do Século", *Colóquio Ciências*, no.16, 1995.
- Davies, Paul, *ABOUT TIME: Einstein's Unfinished Revolution*, Viking, 1995.
- Ellis, George F.R., e Williams, Ruth M., "Flat and Curved Space-Times", Clarendon Press, Oxford, 1988.
- Lobo, Francisco e Crawford, Paulo, "Wormholes: Túneis no Espaço-tempo", *Gazeta de Física*, **22** 4-10, 1999.
- Smolin, Lee, *The Trouble with Physics*, Penguin Books, 2006.