

AULAS DE RELATIVIDADE RESTRITA

PAULO CRAWFORD

1. PRIMEIRA AULA

1.1. O efeito de Doppler e a dilatação do tempo. Vamos começar por recordar o efeito do movimento relativo sobre a taxa de progressão do tempo medido por dois observadores inerciais distintos. Consideremos então dois observadores inerciais, sejam eles Duarte e Mariana, em movimento relativo com velocidade v . Vejamos como podem estes observadores medir a sua distância relativa num dado instante do **tempo próprio** de um deles, isto é, o tempo medido no referencial onde o observador está parado. Começemos por admitir que os observadores se cruzaram num instante anterior e, nesse instante, acertaram os seus relógios.

Para medir distâncias e comparar os tempos dos seus relógios, Duarte e Mariana podem trocar sinais “luminosos”, ou sinais de radar que, de acordo com o segundo postulado da Relatividade Restrita (RR), se deslocam com velocidade c em relação a qualquer deles.

O Duarte poderá medir a que distância se encontra da Mariana, num dado instante do seu tempo próprio, t_C , se enviar um sinal luminoso num instante anterior $t_A < t_C$ do seu relógio, que é entretanto reflectido pela Mariana e regressa de novo ao Duarte no instante posterior $t_B > t_C$. Dirá então que a Mariana estava à distância $d = (t_B - t_A)/2$ segundos-luz (vamos assumir $c = 1$, e medir o espaço e o tempo em segundos-luz) no momento em que o sinal luminoso foi reflectido pela Mariana. O instante correspondente a esse acontecimento, t_C , facilmente se calcula, no referencial próprio do Duarte, em função de t_A e t_B ,

$$t_C = \frac{1}{2}(t_A + t_B).$$

Mas é claro que a um intervalo de tempo T , no referencial do Duarte, corresponde um intervalo maior $T' = KT$, $K > 1$ no referencial da Mariana. Se não vejamos isso com o auxílio do seguinte exemplo (ver Fig(1)).

Suponhamos que a Mariana se afasta do Duarte com uma velocidade $v = 0.6$ ($c = 1$), e que o Duarte envia os seus sinais para a Mariana a intervalos regulares de 6 meses do seu tempo próprio. Se o Duarte envia o primeiro sinal, quando a Mariana se cruza com ele e os relógios dos dois observadores se acertam, então ela está já a uma

Date: 28 de Setembro de 2010.

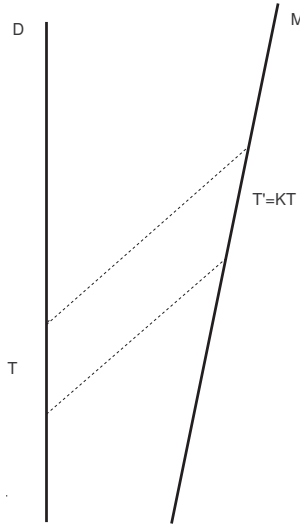


FIGURA 1. O Duarte envia dois sinais luminosos para a Mariana, separados de um intervalo T . A Mariana recebe esses sinais separados de um intervalo maior $T' = KT$, onde $K > 1$ é função da velocidade relativa entre os 2 observadores inerciais.

distância de 0.3 anos-luz quando é enviado o segundo sinal, o qual leva 0.75 anos(-luz) a atingi-la. Seis meses depois de enviar o primeiro sinal, Duarte envia o segundo sinal luminoso. Durante esse tempo, $T = \frac{1}{2}$ ano-luz, a Mariana afastou-se mais 0.3 anos-luz, de modo que o sinal luminoso vai ter de percorrer uma distância maior para atingi-la. De modo que, pelo menos do ponto de vista do Duarte, é evidente que a um intervalo de 6 meses entre dois sinais emitidos corresponde um intervalo maior entre os dois sinais recebidos pela Mariana; concretamente, o Duarte mede um intervalo entre os dois sinais recebidos pela Mariana de 1.25 anos. Isto não nos diz ainda qual o intervalo de tempo medido pela Mariana, mas é com certeza uma indicação de que esse intervalo não será 6 meses, como para o Duarte. Um efeito semelhante ocorrerá se os sinais forem agora enviados da Mariana para o Duarte. E é de esperar que, sendo a velocidade relativa a mesma, o factor K que relaciona os intervalos de tempo seja o mesmo. Como veremos a partir das fórmulas deduzidas adiante, no nosso caso $K = 2$ e portanto ao intervalo de 6 meses do Duarte corresponde um intervalo de 1 ano na recepção desses mesmos sinais pela Mariana. E se os sinais recebidos pela Mariana forem (imediatamente) reflectidos de modo a regressarem ao Duarte, este recebê-los-á separados de dois anos (ver Fig(2)).

Consideremos então dois observadores inerciais em movimento relativo, que podem continuar a ser o Duarte e a Mariana. Duarte envia um sinal de radar, espera um

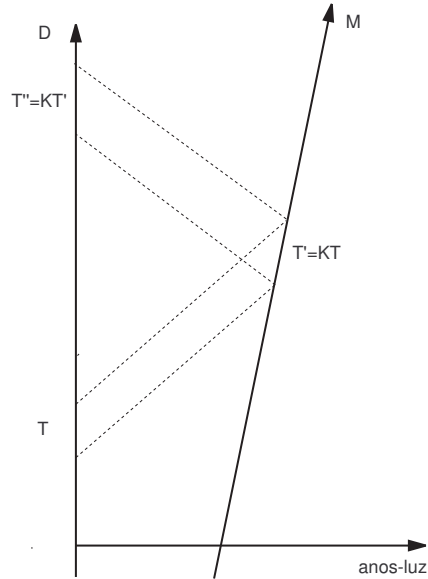


FIGURA 2. O Duarte envia dois sinais luminosos para a Mariana, separados de um intervalo T , e esta devolve-os assim que os recebe.

intervalo de tempo T do seu relógio (tempo próprio), e envia então um segundo sinal. A Mariana mede um intervalo de tempo entre a recepção desses dois sinais como sendo

$$(1) \quad T' = KT$$

Se a Mariana estivesse em repouso em relação ao Duarte, então teríamos $K = 1$, isto é, os intervalos de tempo seriam os mesmos para os dois observadores. Neste caso, as suas linhas do Universo seriam paralelas. Mas se os observadores se afastam $K > 1$, e se os observadores se aproximam $K < 1$. Se soubermos a velocidade entre os 2 observadores facilmente poderemos determinar K . Na verdade, se os relógios da Mariana e do Duarte foram previamente acertados, quando a Mariana se cruzou com o Duarte, então a partir das coordenadas do acontecimento C da Fig. (3) poderemos relacionar K com a velocidade v ,

$$(2) \quad \begin{cases} t_C &= \frac{1}{2}(t_A + t_B) = \frac{1}{2}(K^2T + T) \\ x_C &= \frac{1}{2}(t_B - t_A) = \frac{1}{2}(K^2T - T) \end{cases}$$

Logo, vem

$$(3) \quad v = \frac{x_C}{t_C} = \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \Rightarrow K = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

Note-se que daqui também se pode obter a fórmula da **dilatação do tempo**, comparando o tempo entre 2 acontecimentos que ocorrem no mesmo ponto do espaço de um dado observador, e em pontos do espaço diferentes do outro observador. Assim, $t'_C = T' = KT$ com $t_C = (K^2 + 1)T/2$ vem

$$\frac{t'_C}{t_C} = \frac{2K}{K^2 + 1} = \sqrt{1 - v^2},$$

e portanto,

$$(4) \quad T' = t \sqrt{1 - v^2}$$

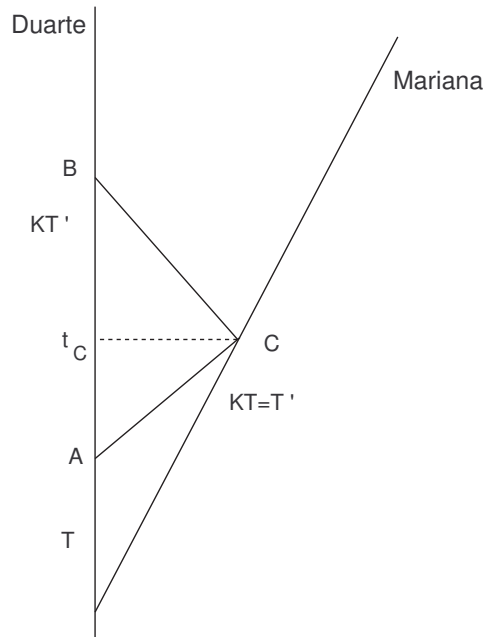


FIGURA 3. No instante t_A , Duarte envia um sinal luminoso para Mariana, que o devolve imediatamente no instante t_C de Duarte. Este recebe-o de volta no seu instante t_B .

Uma das formas mais práticas de medir a quantidade K é através da medição do comprimento de onda (c.d.o.) da luz observada, ou de qualquer outra radiação electromagnética, desde que se conheça o c.d.o. da radiação emitida. Esta é a base das medidas de deslocamento para o vermelho da radiação emitida por um corpo que se afasta do observador.

Se um observador se afasta de nós, o Duarte por exemplo, e envia uma radiação de c.d.o. λ_e , vamos recebê-la com c.d.o. dado por

$$(5) \quad \lambda_o = K\lambda_e,$$

pois o período da radiação emitida é dado $\lambda_e = c\Delta\tau_e$, e a este período corresponde $\Delta\tau_o = K\Delta\tau_e$, para o período da radiação observada, de acordo com a eq.(1).

Esta mudança de c.d.o. é fácil de medir directamente a partir do espectro da luz recebida. Pode fazer-se esta medida através da identificação no espectro observado de uma linha cujo c.d.o. é conhecido na fonte (como é o caso da ‘linha α ’ de c.d.o. 121.5 nm do espectro do Hidrogénio), que depois é comparado com o c.d.o. recebido. Com frequência, o resultado da medida é expresso em termos do parâmetro do *deslocamento para o vermelho*, z , definido por

$$(6) \quad 1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = K = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

Com este resultado ficamos a perceber que K , conhecido por **factor de Bondi**, está associado ao efeito de Doppler entre dois observadores inerciais em movimento relativo.

Note que $\lambda_e = cT_e$ e $T_e = KT_o \Rightarrow \lambda_o = K\lambda_e$. Se os dois observadores se afastam, o c.d.o. observado é maior que o emitido. Mas se o espaço entre os dois observadores diminui, porque eles se aproximam, então acontece o contrário pois nesse caso, v é substituído por $-v$ e vem

$$(7) \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \lambda_e, \quad K < 1.$$

1.2. A adição de velocidades. Consideremos agora três observadores inerciais, cujas linhas do Universo são dadas pela Fig.(3) Nesta figura o observador B tem velocidade v_1 em relação a A , e observador C tem uma velocidade v_2 em relação a B . Pretendemos saber qual é a velocidade relativa, v_{12} , de C em relação a A . Atendendo à linearidade entre K e v , é de esperar que

$$T' = K_1T, \quad T'' = K_{12}T.$$

Mas também podemos admitir que o observador B emite sinais para C separados de um intervalo T' , pelo que

$$T'' = K_2T'.$$

Combinando as relações anteriores concluímos que $T'' = K_2K_1T$ e portanto

$$(8) \quad K_{12} = K_1K_2,$$

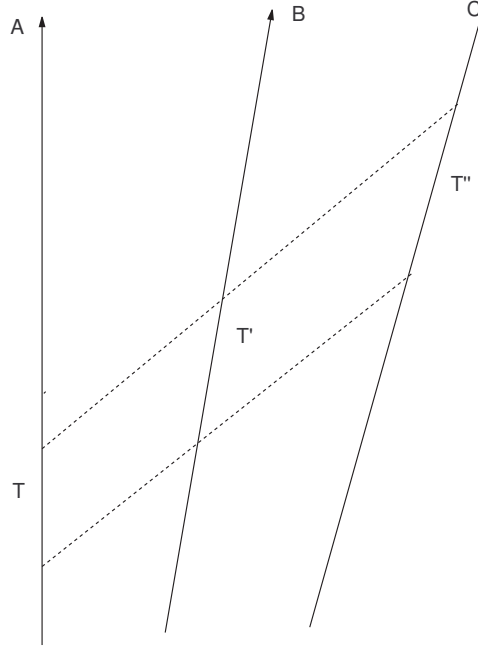


FIGURA 4. O observador B afasta-se do observador A com velocidade v_1 e o observador C afasta-se do observador B com velocidade v_2

Atendendo à relação entre o factor de Bondi e a velocidade eqs.(3),

$$v_{12} = \frac{K_{12}^2 - 1}{K_{12}^2 + 1} = \frac{K_1^2 K_2^2 - 1}{K_1^2 K_2^2 + 1}$$

ou

$$(9) \quad v_{12} = \frac{\frac{1 + v_1}{1 - v_1} \frac{1 + v_2}{1 - v_2} - 1}{\frac{1 + v_1}{1 - v_1} \frac{1 + v_2}{1 - v_2} + 1} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

Com base nesta fórmula de composição de velocidades, vemos que a velocidade da luz não pode ser ultrapassada: se uma destas velocidades v_1 ou v_2 é igual a $c = 1$, a velocidade resultante vem $v_{12} = 1$.

1.3. Transformações de Lorentz. A partir das considerações anteriores, é fácil obter as fórmulas de Transformação de Lorentz, ou seja, as relações que permitem converter as coordenadas de espaço e de tempo de um acontecimento, observado num dado referencial (inercial), com as coordenadas correspondentes do mesmo acontecimento num outro referencial (inercial). Para isso consideremos a Fig.(5)

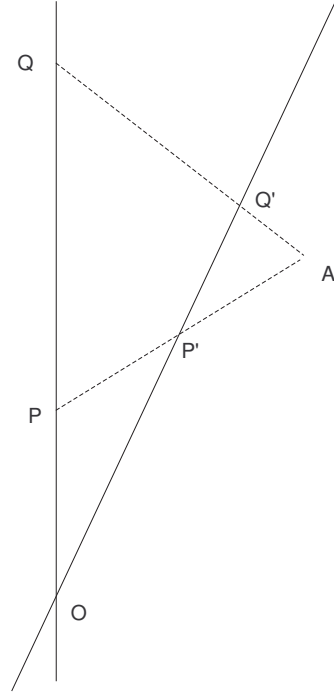


FIGURA 5. Dois observadores cruzam-se no acontecimento O e acertam os seus relógios. No acontecimento P é enviado um sinal luminoso, que se cruza com o outro observador em P' e é reflectido no acontecimento, regressando ao mesmo ponto do espaço. No seu regresso, passa pelo segundo observador em Q' e com o primeiro observador em Q .

Chamando S e S' os dois referenciais, temos em S

$$(10) \quad \begin{cases} t_A &= \frac{1}{2}(t_P + t_Q) \\ x_A &= \frac{1}{2}(t_Q - t_P) \end{cases}$$

e em S'

$$(11) \quad \begin{cases} t'_A &= \frac{1}{2}(t'_{P'} + t'_{Q'}) \\ x'_A &= \frac{1}{2}(t'_{Q'} - t'_{P'}) \end{cases}$$

Tendo em conta que $t'_{P'} = Kt_P$ e $t_Q = Kt'_{Q'}$, vem para um acontecimento A arbitrário

$$\begin{cases} t' - x' &= K(t - x) \\ t + x &= K(t' + x') \end{cases}$$

donde se deduz: $-t'^2 + x'^2 = -t^2 + x^2$, bem como

$$(12) \quad \begin{cases} t' &= \frac{1}{2}(K + K^{-1})t - \frac{1}{2}(K - K^{-1})x = \gamma(t - vx) \\ x' &= \frac{1}{2}(K + K^{-1})x - \frac{1}{2}(K - K^{-1})t = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Assim, segundo Einstein, dados dois observadores inerciais arbitrários, O e O' , as coordenadas de um certo acontecimento P estão relacionadas entre si por uma transformação de Lorentz, definida no caso particular em que v só tem componente segundo x , e os dois referenciais estão igualmente orientados por

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx) \end{aligned} \right\} \text{transformação de Lorentz}$$

Note que se fizermos $K = e^\phi$, o sistema de equações 12 poderá escrever-se

$$(14) \quad \begin{cases} t' &= \cosh(\phi)t - \sinh(\phi)x \\ x' &= \cosh(\phi)x - \sinh(\phi)t \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{cases}$$

sendo $v = \tanh(\phi)$.

Representando as coordenadas de O' por $(x^{\alpha'})$, as coordenadas do mesmo acontecimento físico nos dois referenciais inerciais

$$(15) \quad x^\alpha = (t, x, y, z) \quad \text{e} \quad x^{\alpha'} = (t', x', y', z'), \quad \text{com } \alpha, \alpha' = (0, 1, 2, 3).$$

estão relacionadas entre si por uma transformação de Lorentz (TL)

$$(16) \quad x^{\alpha'} = \sum_{\alpha=0}^3 L_{\alpha}^{\alpha'} x^\alpha,$$

onde $L_{\alpha}^{\alpha'}$ representa a referida TL. Essa mesma transformação pode ser representada pela relação matricial

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou, simplesmente: } X' = L X.$$

Note que os dois índices α' e α na equação (16) dizem respeito a sistemas de coordenadas diferentes; por essa razão se deve representar a matriz da transformação de Lorentz por $L_{\alpha}^{\alpha'}$ e a transformação das coordenadas por

$$x^{\alpha'} = \sum_{\alpha=0}^3 L_{\alpha}^{\alpha'} x^{\alpha}, \quad \text{em vez de} \quad x'^{\beta} = \sum_{\alpha=0}^3 L_{\alpha}^{\beta} x^{\alpha}, .$$

1.4. Espaço-tempo de Minkowski. Representando agora as coordenadas de O' por uma barra em vez de uma plica, e multiplicando a coordenada temporal pela velocidade da luz no vácuo, c , para distinguir as dimensões de espaço e de tempo, a invariância da velocidade da luz no vácuo, c , implica a invariância da forma quadrática

$$(17) \quad s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 \bar{t}^2 - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2),$$

conhecida por *intervalo do Universo*. Esta forma quadrática caracteriza um espaço 4-dimensional a que chamamos espaço-tempo de Minkowski, M_0^4 , em honra de Hermann Minkowski que o propôs em Setembro de 1908 como o espaço adequado à descrição da teoria da RR de Einstein.

Recordemos que, devido à constância da velocidade da luz e à isotropia da sua propagação no vácuo, uma vez emitido um sinal luminoso num dado ponto do espaço e num dado instante, que se tomam respectivamente como origens espacial e temporal dos referenciais S e S' , este satisfaz simultaneamente as equações

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 \bar{t}^2 - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) = 0,$$

ou seja, os pontos do espaço que num dado instante de cada referencial se encontram na mesma fase de vibração formam uma onda esférica que está centrada na origem do referencial respectivo. Tendo em conta as transformações de Lorentz e a relatividade do espaço e do tempo, escusado será dizer que o conjunto dos pontos do espaço que estão na mesma fase de vibração para os observadores de S é diferente dos pontos do espaço que estão na mesma fase de vibração em S' . Só assim se poderá compreender que em ambos os referenciais os respectivos observadores vejam uma onda luminosa esférica em torno de cada um deles.

1.4.1. Intervalo do espaço-tempo e cone de luz. A equação anterior permite definir a quantidade **invariante** dada por (17), isto é, uma quantidade que toma a mesma forma em todos os referenciais inerciais—relacionados entre si por uma transformação de Lorentz—indissolúvelmente ligada à invariância da velocidade da luz, e que no caso de 2 acontecimentos cujas coordenadas têm valores infinitesimalmente próximos, se escreve

$$(18) \quad ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

A equação (18) pode escrever-se com uma notação matricial

$$dX^T \eta dX = \begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Note-se, em primeiro lugar, a utilização da chamada **convenção de soma de Einstein** na equação (18), na qual os índices repetidos μ e ν estão a ser somados de $0 \dots 3$. Este invariante pode ser entendido como uma generalização, num espaço de quatro dimensões conhecido por espaço-tempo de Minkowski, da definição habitual de distância, e é conhecido por *intervalo do Universo* entre o acontecimento de coordenadas (ct, x, y, z) e o acontecimento de coordenadas $(c(t+dt), x+dx, y+dy, z+dz)$. Na verdade, tal como a fórmula euclidiana $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta r^2$ caracteriza o espaço ordinário 3-dimensional, e representa o quadrado da distância entre dois pontos cujas coordenadas diferem $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, também a fórmula $c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$ serve para caracterizar o espaço-tempo de Minkowski e representa o quadrado da **distância** entre dois acontecimentos cujas coordenadas diferem $(\Delta r, c\Delta t)$, neste espaço-tempo 4-dimensional. Em ambas as situações, as distâncias definidas são invariantes, no primeiro caso em relação ao grupo das rotações e no segundo em relação ao grupo de Lorentz.

1.4.2. *Pares de acontecimentos e estrutura causal.* Consideremos dois acontecimentos infinitesimalmente próximos. Reduzindo o espaço-tempo a duas dimensões, uma dimensão espacial e uma temporal (espaço de Minkowski 2-D), e fazendo coincidir essa direcção espacial com a direcção da velocidade relativa entre os dois referenciais, escrevemos o intervalo infinitesimal

$$(19) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2.$$

Se os 2 acontecimentos ocorrem no mesmo ponto de \bar{S} , $d\bar{x} = 0 \Rightarrow ds^2 > 0$, e podemos escrever (1.5) da seguinte forma

$$-dx^2 + c^2 dt^2 = c^2 d\bar{t}^2$$

e portanto

$$(20) \quad d\bar{t} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

onde $v = dx/dt$ é a velocidade de \bar{S} em S .

Concluimos que o intervalo de tempo é diferente em S e \bar{S} e que é mais curto no referencial onde os acontecimentos ocorrem no mesmo ponto do espaço. Esse referencial, neste caso \bar{S} , designa-se **referencial próprio** para esses acontecimentos.

Assim, em qualquer referencial diferente do referencial próprio o tempo é **dilatado**. Note-se ainda que embora $d\bar{x} = 0$, $dx = vdt \neq 0$ (use as transformações de Lorentz (13)), isto é, os dois acontecimentos ocorrem no mesmo ponto de \bar{S} mas ocorrem em pontos diferentes de S .

Consideremos agora $d\bar{t} = 0$ (acontecimentos simultâneos em \bar{S}). Vem $ds^2 < 0$ pois

$$ds^2 = -dx^2 + c^2 dt^2 = -d\bar{x}^2 < 0 \quad (\text{par tipo-espaço}),$$

e usando as TL vemos que $dt' = 0 \Rightarrow dt = vdx/c^2$, logo

$$(21) \quad dx^2 - c^2 dt^2 = dx^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = d\bar{x}^2 \Rightarrow dx \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = d\bar{x}.$$

Vemos que acontecimentos simultâneos em \bar{S} , e que ocorrem em pontos diferentes do espaço em \bar{S} , não são simultâneos em S : $dt \neq 0$.

Problemas

- 1.1 No parágrafo anterior obtivemos o deslocamento de Doppler entre dois observadores que se estão a afastar um do outro. Deduza o deslocamento de Doppler, pelo método do radar, no caso em que os observadores se aproximam um do outro. Utilize um diagrama de espaço-tempo apropriado, do tipo usado na fig.(3).
- 1.2 Dados dois observadores com uma velocidade relativa v , considere a figura (6) que representa as linhas do Universo desses observadores e de um conjunto de sinais de radar trocadas entre eles. Assim, numerando sucessivamente os instantes determinados por esses observadores cada vez que recebe e/ou envia um sinal de radar, mostre que se verificam as seguintes relações,

$$T_n = K T_{n-1} \quad T_{n+1} = K T_n, \quad T_n = T_0 K^n, \quad t_n = \frac{1}{2}(T_{n-1} + T_{n+1}) = \gamma T_n.$$

onde $\gamma = (K + K^{-1})/2 = (1 - v^2)^{-1/2}$. Por exemplo, na figura $t_3 = (T_2 + T_4)/2$ é o instante medido pelo observador em repouso correspondente ao acontecimento T_3 no referencial próprio do observador em movimento.

- 1.3 Mariana despede-se do Duarte, mete-se na sua nave espacial e inicia uma viagem à velocidade de 60% da velocidade da luz. Ao fim de um ano do seu tempo próprio sente saudades de casa e regressa à mesma velocidade, chegando a casa dois anos mais velha. Admitindo que o tempo que a Mariana

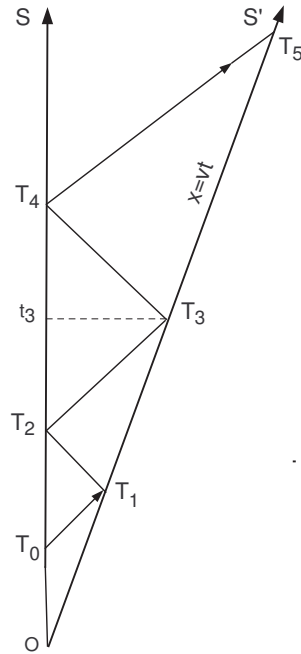


FIGURA 6. Exercício 2

leva a inverter o sentido da velocidade é desprezável em comparação com o tempo da viagem, quanto tempo terá envelhecido Duarte durante a ausência da Mariana? Recorra a um diagrama de espaço-tempo e utilize o factor K de Bondi para resolver esta questão.

- 1.4 Se dois acontecimentos ocorrem no mesmo ponto (do espaço) de um dado referencial inercial S , mostre que a sua seqüência temporal é a mesma em todos os referenciais inerciais. Discuta o problema com o auxílio de um diagrama de Minkowski. Em qual dos referenciais o intervalo de tempo é mínimo?
- 1.5 Determine a matriz da transformação de Lorentz L resultante da composição de duas transformações de Lorentz especiais (“boosts”): uma segundo o eixo dos XX , com parâmetro v_x , seguida de outra transf. de Lorentz especial segundo o eixo dos YY , com parâmetro v_y . Mostre que, em geral, o produto de duas transformações de Lorentz não é comutativo:

$$L(v_x) L(v_y) \neq L(v_y) L(v_x).$$

2. SEGUNDA AULA

2.1. **Resolução do paradoxo dos gémeos.** Nos últimos anos têm surgido na literatura da especialidade muitos trabalhos sobre as “Máquinas do Tempo”, isto é, construções geométricas de espaço-tempo, soluções das equações de Einstein da Gravitação, que admitem curvas temporais fechadas: qualquer observador que seguisse ao longo dessas linhas do Universo poderia re-visitar o seu passado. Na sequência dessa discussão voltaram a aparecer artigos sobre o chamado **paradoxo dos gémeos** e sua resolução no âmbito da teoria da relatividade (restrita). O paradoxo dos gémeos (também conhecido por paradoxo de Langevin) é uma “experiência de pensamento”, esquematizada na figura (7), onde dois gémeos se separam num dado instante, iniciando um deles uma viagem numa nave que se desloca a uma velocidade próxima da velocidade da luz ($v \approx 1$) até uma estrela distante, e regressa logo em seguida à Terra. Ao encontrar-se com o seu gémeo que ficou na Terra verifica que este está muito mais velho, significando isto que o tempo anda mais lentamente para o gémeo viajante.

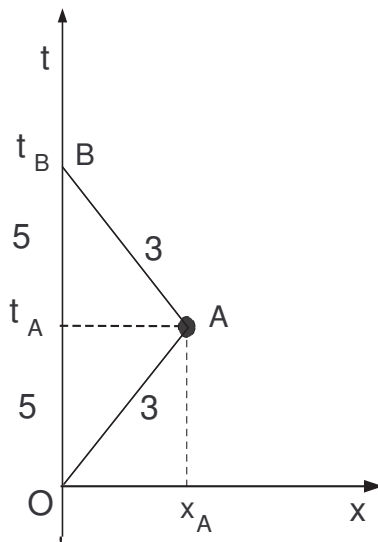


FIGURA 7. Dois gémeos separam-se no instante O , em que acertam os seus relógios um pelo outro, ficando um deles em repouso no referencial do laboratório (Terra), com coordenadas (t, x) enquanto o outro viaja, com velocidade $v = 0.8$ ($c = 1$), até uma estrela a 4 anos-luz da Terra, e no instante em que lá chega (acontecimento B) regressa de imediato ao mesmo ponto do espaço onde tinha ficado o primeiro gémeo (acontecimento A), com velocidade $v = -0.8$

Comecemos por esclarecer dois pontos sobre os quais se teceram, sobretudo na literatura mais antiga, muitas considerações erróneas que devem ser clarificadas desde o início. Em primeiro lugar, a questão em epígrafe não é de modo algum um paradoxo da teoria da relatividade, e em segundo lugar não é necessário invocar a teoria da relatividade generalizada para a resolver. Estas duas confusões eram justificadas com os seguintes argumentos: sendo o movimento um conceito relativo, qualquer dos gémeos poderia admitir que estava em repouso no seu referencial e o outro em movimento. Sendo assim não se percebia a assimetria do resultado. É contra o senso comum admitir que dois gémeos possam ter idade diferente. Ainda por cima isso era explicado como uma consequência do movimento relativo entre os dois gémeos. Ora, na verdade não há simetria entre os dois gémeos pois um deles poderá ser considerado inercial (o que ficou na Terra) mas o viajante, que vai e volta, sofre algures no seu trajecto uma aceleração para poder inverter o sentido da viagem e poder voltar à Terra. Só assim os dois gémeos se poderão voltar a cruzar depois de se terem separado.

Retomando o nosso exemplo dos gémeos, vamos então concretizá-lo para o analisar em pormenor (ver Fig.7). Sejam as nossas gémeas Patty e Selma Bouvier, as irmãs mais velhas de Marge Simpson. Admitamos que Patty fica cá na Terra enquanto Selma se desloca numa nave espacial, até um planeta distante (à procura do terceiro marido), com uma velocidade $v = 0.8(c = 1)$, em relação à Terra (e a Patty). Se Selma se afasta da Terra durante 3 anos do seu tempo próprio, τ , então do ponto de vista de Patty, a viagem de ida ocorre num tempo dilatado e demora

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{3}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 5 \text{ anos.}$$

Como tal, Selma afasta-se uma distância de 4 anos-luz, de acordo com os observadores do referencial Terra. Com estes dados podemos escrever o intervalo do espaço-tempo para o par de acontecimentos (O,B),

$$\tau^2 = t^2 - x^2 \rightarrow 3^2 = 5^2 - 4^2,$$

que exprime a invariância da velocidade da luz (no vácuo). Note-se igualmente que, para a gémea viajante, o espaço percorrido é uma contracção do espaço medido por Patty, isto é,

$$x' = x\sqrt{1 - v^2} = 4 \times 0.6 = 2.4 \text{ anos-luz.}$$

O que está em concordância com o tempo medido pelo relógio da Selma, onde só tinha passado $\tau = x'/v = 2.4/0.8 = 3$ anos. Admitindo que esta regressa de imediato à Terra com a mesma velocidade $v = 0.8$, as duas gémeas voltam a encontrar-se passados $10(=8/0.8)$ anos, no referencial da Patty, após a partida da Selma, mas simplesmente $4.8/0.8 = 6$ anos no relógio da Selma. Em resumo, as duas “gémeas” fazem agora uma diferença de 4 anos de idade, sendo Patty a mais velha. Este é sempre

um resultado surpreendente, por muita familiaridade que tenhamos com a teoria da relatividade.

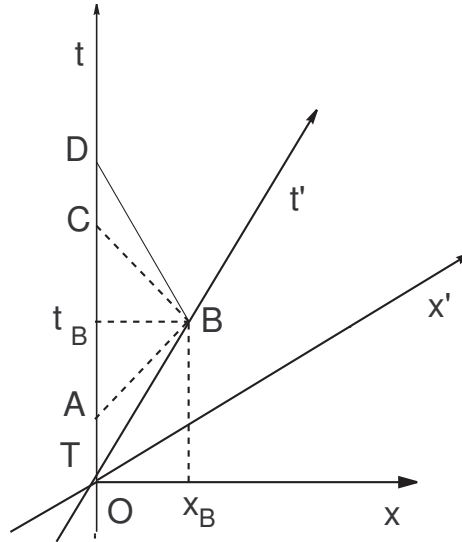


FIGURA 8. As duas gémeas separam-se no instante O , quando $t = t' = 0$; no instante $t_A = 1$ (ano) sai um sinal luminoso de Patty que chega a Selma no acontecimento B ($t'_B = 3$ anos). Este mesmo acontecimento é visto por Patty no instante $t_C = 9$ anos.

Continuando a nossa análise, vamos admitir que as duas gémeas estão munidas de potentes telescópios de modo a poderem observar os relógios de pulso uma da outra, para procurarem compreender em que medida o tempo é relativo. Assim, Selma vai observando o relógio de Patty ao longo da viagem e regista o valor observado no momento em que atinge o afastamento máximo da Terra e inicia o seu regresso (acontecimento B , no diagrama da Fig.8). Selma vê o relógio de Patty marcar $t_A = 1$ ano, quando o seu relógio marca $t'_B = 3$ anos, pois

$$t'_B = K t_A = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} t_A = 3 \text{ anos,}$$

atendendo ao efeito de Doppler. Por outro lado, Patty vê Selma atingir o acontecimento B , e a iniciar o regresso, quando o seu relógio marca 9 anos, pois para Patty, a sua gémea viajante leva 5 anos a atingir o planeta distante e a luz leva mais 4 anos a regressar à Terra, mostrando Selma a chegar ao planeta distante. Assim para Patty o relógio de Selma, que marca 3 anos, parece estar a trabalhar a um terço da

velocidade do seu relógio ($3/9$). Exactamente como acontece com Selma que vê o relógio de Patty trabalhar a um terço da velocidade do seu ($1/3$).

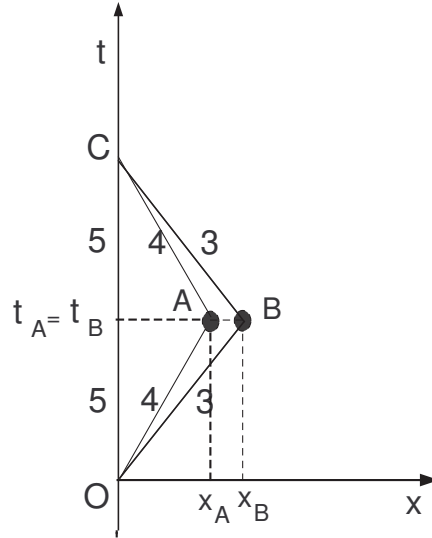


FIGURA 9. Nesta figura estão indicados dois caminhos possíveis para o gêmeo viajante, conforme $v = 0.6$ ou $v = 0.8$. No primeiro $t_A = 5$ anos mas $\tau_A = 4$ anos, e no segundo temos também $t_B = 5$ anos, mas $\tau_B = 3$ anos, como no exemplo de Patty e Selma. Em teoria o tempo próprio da gêmea viajante pode ser tão pequeno quanto se queira se $v \rightarrow 1$, pois $\tau^2 = t^2 - x^2 = t^2 - (vt)^2$.

Na viagem de regresso, Patty vê o relógio de Selma passar de 3 anos para 6 anos num só ano do seu relógio: intervalo de tempo $t_D - t_C$ do relógio de Patty. Ou seja, Patty vê agora o relógio de Selma avançar 3 anos num ano do seu tempo próprio, o que corresponde a uma velocidade três vezes maior. Por sua vez Selma vê, durante o seu regresso, o relógio de Patty avançar de 1 ano para 10 anos, enquanto o seu relógio marca um tempo próprio de três anos. Selma é também levada a concluir que ela vê o relógio de Patty a trabalhar a uma velocidade três vezes maior do que o seu. E ambas concordam que no fim da viagem, têm idades diferentes estando Patty 4 anos mais velha que Selma, a gêmea viajante, que não teve tempo de encontrar o terceiro marido no planeta distante. A diferença de idades deve ser entendida como uma consequência da assimetria entre as duas gêmeas: Patty ficou sempre no mesmo referencial (inercial) Terra, enquanto Selma teve que mudar de referencial e, por isso, o seu referencial próprio sofreu uma aceleração, logo Selma não é uma observadora inercial. Note-se ainda que Patty e Selma concordam na

leitura do relógio de Selma quando esta chega ao planeta distante, mas essas leituras correspondem a dois acontecimentos distintos com tempos diferentes no relógio de Patty.

Note-se ainda que se a velocidade relativa entre os dois gêmeos fosse menor, a diferença de idades no momento do re-encontro também seria menor. Por outras palavras, o gêmeo viajante pode teoricamente ir a uma velocidade tão próxima de $c = 1$ quanto se queira e assim reduzir o seu tempo próprio tanto quanto se queira, fazendo assim aumentar a diferença de idades. No limite, se o gêmeo pudesse viajar como um fóton, ao re-encontrar o seu irmão teria a mesma idade com que partiu.

Na Fig. (9) vemos dois exemplos do que ficou dito atrás, para $v = 0.6$ e $v = 0.8$. Em ambos os casos a viagem leva 10 anos para o gêmeo que ficou na Terra. Mas no primeiro caso, o gêmeo viajante afasta-se uma distância de 3 anos-luz num tempo próprio de 4 anos, e no segundo caso, o gêmeo viajante afasta-se 4 anos-luz num tempo próprio de 3 anos.

Fica assim resolvido, no âmbito da teoria da relatividade restrita, o chamado “paradoxo” dos gêmeos. De caminho foi possível apreciar a interligação entre dilatação do tempo e contracção do espaço, e o efeito de Doppler entre dois observadores em movimento relativo.

3. TERCEIRA AULA

3.1. Vector Tangente a uma Curva. No espaço Euclidiano 3-dimensional $S \subset R^3$, qualquer par de pontos (a, b) define um vector \vec{ab} que os une. O vector \vec{ab} depende somente da diferença das coordenadas dos pontos a e b , e assim um dado vector pode ser representado de muitas formas: a pode ser escolhido arbitrariamente e então o vector \vec{ab} determina o outro ponto $b = a + \vec{ab}$.

Podemos transportar esta ideia para o espaço-tempo de Minkowski M_0^4 . Associaremos um *vector* a cada par de acontecimentos. E dois pares de acontecimentos (A, B) e (P, Q) serão chamados *equivalentes*— $(A, B) \sim (P, Q)$ —se as diferenças das suas coordenadas são iguais

$$x^\alpha(B) - x^\alpha(A) = x^\alpha(Q) - x^\alpha(P),$$

para um dado sistema de coordenadas inerciais (x^α) , e portanto para *qualquer* sistema inercial de coordenadas, atendendo à linearidade das transformações de Lorentz. A relação \sim é uma relação de equivalência.

Definição 1. Um **vector** ou *4-vector* do espaço-tempo de Minkowski é uma classe de equivalência de pares de acontecimentos físicos $(A, B), \dots, (P, Q)$ para a relação de equivalência definida por $x^\alpha(B) - x^\alpha(A) = \dots = x^\alpha(Q) - x^\alpha(P)$.

Por outras palavras, identificamos um dado vector \mathbf{X} com a colecção de todos os pares de pontos para os quais a diferença das coordenadas seja igual às componentes do vector. O vector da classe de equivalência a que pertence o par de pontos (A, B) representa-se por $\mathbf{X} \equiv \overrightarrow{AB}$. Ou seja, o vector que permite associar o ponto B ao ponto A , $B := A + \mathbf{X}$, tem componentes

$$X^\mu = X^\mu(B) - X^\mu(A)$$

Fazer uma transformação de coordenadas corresponde a fazer uma transformação de Lorentz, pelo que as componentes de X no novo sistema de coordenadas são dadas por

$$X^{\alpha'} = \sum_{\mu} L_{\mu}^{\alpha'} X^{\mu}$$

onde L representa uma matriz de Lorentz. O conjunto das componentes de um 4-vector num dado sistema de coordenadas caracteriza completamente o 4-vector.

Em relatividade geral, lidamos com espaços-tempo curvos onde é impossível definir um vector à custa de dois pontos. Portanto, temos de recorrer a uma noção local de vector, que é a única adequada à situação: o vector tangente a uma curva que passa por um dado ponto da variedade. Assim, o **vector tangente** V_p no ponto p do espaço-tempo M , por onde passa a curva $C(\lambda)$, é o operador derivada ao longo daquela curva, nesse ponto. Ao espaço vectorial ao qual V_p pertence chamamos espaço tangente à variedade M em p , e representa-se por $T_p M$.

Como exemplo desta nova definição de vector, vamos tomar como ponto de partida o conceito de velocidade da Mecânica. Efectivamente, o vector velocidade na Mecânica é o vector tangente à trajectória da partícula. Transcrevendo esta ideia para o espaço-tempo, tomamos a linha do Universo de uma partícula, $C(\tau)$, aqui parametrizada pelo respectivo tempo próprio τ , e definimos o 4-vector velocidade como o *vector tangente* a esta linha, e cujas componentes são

$$(22) \quad U^\mu = (U^0, U^i), \quad U^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{v^i}{\sqrt{1-v^2}}$$

onde $v^k = dx^k/dt$ são as componentes da “velocidade ordinária”, $v^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$. Ou seja, as componentes do 4-vector velocidade são

$$U^\mu = \frac{dt}{d\tau} \left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \gamma(v)(1, \vec{v}).$$

Quando nos referimos a uma curva, pensamos sempre numa *curva diferenciável* que passamos a definir.

Definição 2. *Uma curva diferenciável $\mathcal{C}(\lambda)$ é uma aplicação contínua do intervalo (a, b) da recta real no espaço-tempo M (de modo que a cada valor do parâmetro $\lambda \in (a, b)$, $\mathcal{C}(\lambda)$ é um ponto de M) e que é tal que as funções $x^0(\mathcal{C}(\lambda)), \dots, x^3(\mathcal{C}(\lambda))$,*

ou mais simplesmente $x^\alpha(\lambda)$, são funções diferenciáveis de λ para qualquer sistema de coordenadas,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : (a, b) \subset R^1 &\rightarrow U \subset M \\ \lambda_0 &\mapsto \mathcal{C}(\lambda_0) = P. \end{aligned}$$

onde λ é o parâmetro à curva e $x^\alpha(P) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ são as coordenadas do ponto P de M .

É claro que $x^\alpha(\lambda)$ representa todos os pontos P pertencentes à curva \mathcal{C} , dados pelas suas coordenadas, e por isso se designa representação coordenada da curva.

Nesta definição, a cada ponto imagem corresponde um único valor do parâmetro λ . Assim, duas curvas são diferentes, mesmo que tenham a mesma imagem em M , se são parametrizadas por parâmetros diferentes, ou seja, se associamos um valor diferente do parâmetro aos mesmos pontos imagem.

Definição 3. O vector tangente a uma curva diferenciável \mathcal{C} no ponto $\mathcal{C}(\lambda_0)$ da curva é dado por

$$\left(\frac{d\mathcal{C}}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = \dot{\mathcal{C}}(\lambda_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathcal{C}(\lambda_0 + h) - \mathcal{C}(\lambda_0)]$$

Em $T_p M$ este limite pode ser definido usando a topologia natural sobre um espaço vectorial de dimensão igual à dimensão de M . Esta definição só pode ser aplicada a uma variedade M arbitrária se M está imersa num espaço plano de dimensão $d = \dim(M) + 1$, caso contrário não sabemos o significam os “deslocamentos” $\mathcal{C}(\lambda_0 + h) - \mathcal{C}(\lambda_0)$. Mas se trabalharmos com as funções $x^\alpha(\mathcal{C}(\lambda))$, temos na verdade uma aplicação composta $x^\alpha \circ \mathcal{C}$ que é uma curva em R^4 , e podemos representar o vector

$$\mathbf{V}_p = \left(\frac{d\mathcal{C}}{d\lambda} \right)_{\lambda_0}$$

pelas suas componentes no sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$,

$$\mathbf{V}_p = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [x(\mathcal{C}(\lambda_0 + h)) - x(\mathcal{C}(\lambda_0))] = \left(\frac{d}{d\lambda} x(\mathcal{C}) \right)_{\lambda=\lambda_0}$$

ou seja, em componentes

$$V^\alpha = \left(\frac{d}{d\lambda} x^\alpha(\mathcal{C}) \right)_{\lambda=\lambda_0}.$$

Qualquer linha coordenada é um bom exemplo de curva diferenciável, como é o caso da linha x^0 (eixo temporal)

$$\mathcal{C}_{(0)}(t) : x^0(\mathcal{C}(t)) = t, x^1(\mathcal{C}(t)) = 0, x^2(\mathcal{C}(t)) = 0, x^3(\mathcal{C}(t)) = 0.$$

O vector tangente a esta linha coordenada é

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{d}{dt} \mathcal{C}_{(0)}(t)$$

que é o mesmo em todos os pontos da linha coordenada, ou seja, para todos os valores do parâmetro t .

O vector $\mathbf{e}_{(0)} \in T_p M$ tem as seguintes componentes

$$\mathbf{e}_{(0)} := \frac{d}{dt}x(\mathcal{C}_{(0)}(t)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Do mesmo modo se definem os vectores tangentes às outras linhas coordenadas $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$, cujas componentes são respectivamente,

$$\mathbf{e}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e obtêm-se de modo semelhante a $\mathbf{e}_{(0)}$ por derivação

$$\mathbf{e}_{(1)} := \frac{d}{dx}x(\mathcal{C}_{(1)}(x)), \quad \mathbf{e}_{(2)} := \frac{d}{dy}x(\mathcal{C}_{(2)}(y)), \quad \mathbf{e}_{(3)} := \frac{d}{dz}x(\mathcal{C}_{(3)}(z)),$$

onde, por exemplo, $x(\mathcal{C}_{(1)}(x))$ é a aplicação definida pela curva

$$\mathcal{C}_{(1)}(x) : x^0(\mathcal{C}(x)) = 0, \quad x^1(\mathcal{C}(x)) = x, \quad x^2(\mathcal{C}(x)) = 0, \quad x^3(\mathcal{C}(x)) = 0.$$

Habitualmente representam-se os vectores base por \mathbf{e}_c em vez da notação mais pesada $\mathbf{e}_{(c)}$; mas o índice c não deve ser visto como indicando uma componente mas sim como uma maneira de numerar os vectores tangentes às linhas coordenadas. Como este índice toma os valores $c = 0, 1, 2, 3$, há quatro vectores base no espaço-tempo. Qualquer vector $\mathbf{V}_p \in T_p M$ pode ser representado como uma combinação linear dos vectores base

$$(23) \quad \mathbf{V}_p = V^0 \mathbf{e}_0 + V^1 \mathbf{e}_1 + V^2 \mathbf{e}_2 + V^3 \mathbf{e}_3.$$

Na verdade, esta representação é equivalente à representação matricial

$$V_p = \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = V^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + V^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o que é inteiramente consistente com a Eq.(23). Veremos adiante que os vectores \mathbf{e}_c constituem uma base ortonormada.

Como ao longo da linha do Universo de uma partícula se podem definir diferentes vectores tangentes, um em cada ponto, deveríamos antes falar de um campo vectorial

tangente. Em geral, um **campo vectorial** definido numa variedade M é uma regra que associa a cada ponto p de M um vector tangente nesse ponto.

3.2. A métrica de Minkowski. Na geometria dos espaços Euclidianos, como é o espaço R^3 , o produto escalar de dois vectores desempenha um papel primordial. O análogo do produto interno em relatividade é desempenhado pela aplicação bilinear, simétrica η , já anteriormente introduzida como a matriz da forma quadrática que caracteriza o intervalo do Universo, e que realmente associa a cada par de vectores tangentes, X e Y , o número real

$$(24) \quad \eta(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \eta(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) := X^T \eta Y = X^0 Y^0 - X^1 Y^1 - X^2 Y^2 - X^3 Y^3$$

num sistema inercial de coordenadas. Efectuando uma mudança de coordenadas (transformação de Lorentz), encontramos

$$(25) \quad \bar{X}^T \eta \bar{Y} = X^T L^T \eta L Y = X^T \eta Y,$$

pois $L^T \eta L = \eta$, e portanto a definição de $\eta(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ não depende do sistema de coordenadas (inerciais) usado. A aplicação η , que associa a dois vectores do espaço-tempo um número real, é a *métrica* do espaço-tempo de Minkowski. Generalizando a noção de produto interno dos espaços Euclidianos, podemos dizer que a aplicação

$$(26) \quad \eta(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2,$$

como o quadrado da norma de um 4-vector.

Até agora temos lidado com a métrica, na sua representação matricial. Mas as 10 componentes dessa matriz simétrica representam também um **tensor** simétrico de segunda ordem, como vimos na equação (24); ou seja, η é uma aplicação bilinear, simétrica, que associa a cada dois vectores um número real, que entendemos com o produto escalar entre esses vectores. Na notação tensorial temos

$$\eta(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$$

A métrica é o objecto básico mais importante da teoria da relatividade. Seria por isso mais apropriado começar com a métrica e só depois definir o grupo de Lorentz como o conjunto de transformações das coordenadas que deixa a métrica invariante nos termos da Eq.(25).

Se aplicarmos a métrica a um único vector, obtemos um outro objecto, conhecido por co-vector ou forma linear, $\eta(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{X}}$, em componentes

$$\eta_{\mu\nu} X^\mu = X_\nu.$$

Desta forma a métrica estabelece uma correspondência (aplicação linear) 1-1 entre vectores e co-vectores, que nos permite associar a cada vector \mathbf{X} um covector $\eta(\mathbf{X})$, que por simplificação de notação representámos por $\tilde{\mathbf{X}}$. Estes dois objectos estão

ligados entre si pela métrica (e sua inversa) e por se confundem, embora sejam objectos que vivem em espaços vectoriais diferentes, duais um do outro.

Aos co-vectores (vectores duais) também se dá o nome de **formas lineares** ou **1-formas** (leia-se “formas diferenciais de grau um”). Igualmente, a cada 1-forma $\tilde{\mathbf{P}}$ corresponde um único vector: $\mathbf{P} = \eta^{-1}(\tilde{\mathbf{P}})$, definido pelas suas projecções em todos os outros vectores. Ao espaço vectorial a que pertencem os co-vectores chamamos espaço co-tangente, e representa-se por T_p^*M . Note que η^{-1} é a função inversa de η . Esta correspondência entre vectores e co-vectores, significa que uma determinada quantidade física pode ser igualmente descrita por um vector \mathbf{P} ou pela sua 1-forma associada $\tilde{\mathbf{P}}$. Por exemplo, afirmámos que o 4-momento era naturalmente descrito como um covector (ou 1-forma), mas podemos igualmente defini-lo como o vector correspondente. A correspondência 1-1 entre vectores e co-vectores leva-nos muitas vezes a omitir o til da 1-forma $\tilde{\mathbf{P}}$ e escrever o mesmo símbolo \mathbf{P} para ambos, vector e co-vector. Tendo em conta que ficou dito não é difícil provar que os espaços vectoriais $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$ tem a mesma dimensão da variedade M .

3.2.1. *Vectores temporais, espaciais e nulos.* A expressão que dá o produto interno de um 4-vector por si próprio,

$$\eta(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2,$$

fornece o análogo do quadrado do comprimento do um vector de um espaço euclidiano 3-dimensional. Mas ao contrário do que acontece em R^3 , $\eta(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ pode ser positivo, negativo ou nulo, em particular $\eta(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ não implica que as componentes de X são nulas. A expressão (26) permite-nos classificar os vectores do espaço tangente $T_p(M)$ em três tipos. No caso do espaço-tempo de Minkowski os espaços tangentes são idênticos em todos os pontos e por isso se representam $T(M)$.

Fixamos o ponto O do espaço-tempo de Minkowski M_0^4 como sendo a sua origem. Então a cada ponto P corresponde unicamente um vector $\mathbf{U} = P - O$, e a classificação dos vectores de $T(M)$ fornece-nos uma classificação dos acontecimentos de M_0^4 relativamente à origem.

Sejam $\mathbf{U} = P - O$ e $\mathbf{X} = Q - O$ dois 4-vectores aplicados em O , sendo O a origem de um sistema de coordenadas inerciais. Se P se situa sobre o eixo do tempo (x^0) desse sistema, então o vector $\mathbf{U} = P - O$ tem componentes $(U^0, 0, 0, 0)$ e, por isso, da Eq.(26) concluímos que $\eta(\mathbf{U}, \mathbf{U}) > 0$. Chamamos a todos os vectores para os quais $\eta(\mathbf{U}, \mathbf{U}) > 0$, vectores **temporais** (ou tipo tempo).

Exercício 1. *Dado um vector temporal, mostre que é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas inerciais no qual ele só tem componente temporal.*

Igualmente, os 4-vectores para os quais $\eta(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0$, serão designados **espaciais** (ou do tipo espaço). Para estes vectores também existe um sistema de coordenadas

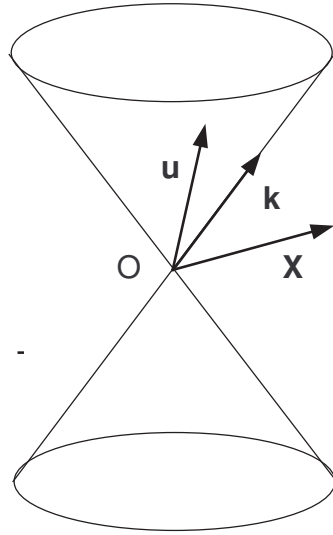


FIGURA 10. Cone de luz e vectores \mathbf{U} (temporal), \mathbf{K} (tipo luz) e \mathbf{X} (espacial), todos com origem no acontecimento O .

onde eles são representados unicamente pelas suas componentes espaciais. É claro, os acontecimentos (O, P) formam um par temporal e os acontecimentos (O, Q) formam um par espacial. Neste último caso, é possível encontrar um sistema de coordenadas onde $t_O = t_Q$ e diz-se então que os acontecimentos O e Q são **síncronos**. Na realidade, dado um acontecimento O pertencente a uma linha do Universo de um observador, temos uma classe de equivalência de acontecimentos que são síncronos com O . Essa classe de equivalência forma um plano 3-dimensional que passa por O .

Os 4-vectores que verificam a relação $\eta(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = 0$ são chamados **nulos** (ou do tipo luz). O conjunto de todos os vectores nulos aplicados em O formam o **cone de luz** com vértice em O .

Se dois acontecimentos A e B formam um par tipo-tempo então o vector $\mathbf{X} = B - A$ é um vector temporal: $\eta(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$. E existe sempre um observador que os vê ocorrer no mesmo ponto do espaço. Mas se a separação espacial entre os acontecimentos aumenta continuamente, então \mathbf{X} começa por se tornar nulo e depois do tipo espaço e, neste caso, o observador não poderá estar presente em ambos acontecimentos sucessivamente. Pontos cujo intervalo do Universo é do tipo tempo estão em comunicação causal, pois é sempre possível enviar um sinal de um para outro; porém o mesmo já não acontece para um par de acontecimentos do tipo espaço.

De acordo com a teoria da relatividade se A e B constituem um par do tipo espaço, isto é, se $\eta(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0$, então não há nada que possa acontecer em A que tenha uma influência causal directa sobre o que acontece em B .

3.3. Energia e 4-momento linear. O 4-momento linear de uma partícula pontual clássica pode ser representado por um 4-vector temporal (ou nulo, no caso do fóton), dirigido para o futuro (d.p.f.), cujas componentes são P^μ . O quadrado da *massa em repouso* da partícula é dado por (com $c = 1$)

$$(27) \quad m^2 = P^\mu P_\mu.$$

Se o 4-vector unitário temporal, d.p.f, V^α , representar a 4-velocidade de um observador, então a energia da partícula medida por esse observador, é

$$(28) \quad E = P_\alpha V^\alpha.$$

Por exemplo, no referencial onde a partícula está em repouso $P^\alpha = (m, 0, 0, 0)$, e tendo o observador tem uma velocidade \vec{v} em relação à partícula, vem então $V^\alpha = \gamma(1, \vec{v})$ onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ é o factor de Lorentz associado à velocidade \vec{v} . Nestas condições, obtemos para E o resultado conhecido

$$(29) \quad E = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Embora esta expressão seja muito útil em certas circunstâncias, a fórmula invariante (28) é a que deve ser retida para aplicações futuras pois pode ser usada mesmo em relatividade geral.

Em particular, se P^α é um vector tipo luz já a expressão (29) não é aplicável ($v = 1$ e $m = 0$) pois dá um valor indeterminado para E , mas a expressão (28) continua válida.

Assim se P^α representa o 4-momento de uma partícula de massa em repouso nula, então E é a energia dessa partícula tal como é medida por um observador com 4-velocidade V^α .

Portanto, se um fóton é emitido por um corpo com 4-velocidade U^α e recebida por um observador com 4-velocidade V^α , então a energia *emitida* é $E_e = P_\alpha U^\alpha$ (no referencial próprio do corpo), e a energia *recebida* pelo observador é $E_r = P_\mu V^\mu$. É o facto destas energias serem diferentes (pois $U^\alpha \neq V^\alpha$, por hipótese) que está na base do *efeito de Doppler* relativístico.

No referencial próprio do corpo emissor temos $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, $V^\mu = \gamma(1, \vec{v})$, e $P^\alpha = (E, \vec{p})$ com $E^2 - p^2 = 0$. A energia emitida E_e é então

$$E_e = P_\mu U^\mu = E,$$

e a energia recebida E_r é dada por

$$E_r = P_\alpha V^\alpha = \gamma(E - \vec{p} \cdot \vec{v}).$$

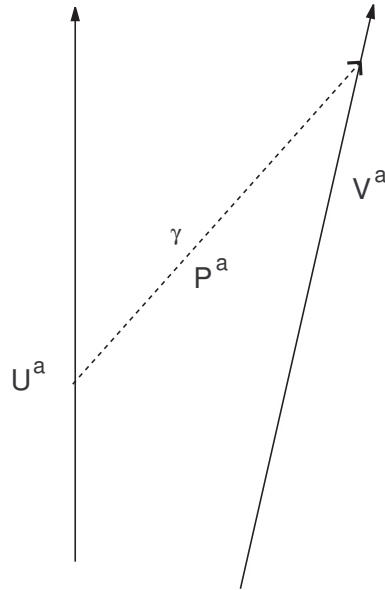


FIGURA 11. Emissão e recepção de um fóton.

A razão entre estas energias é

$$(30) \quad E_r/E_e = \gamma(1 - v \cos \theta)$$

onde θ é o ângulo entre \vec{p} e \vec{v} .

Assim, se a velocidade do receptor tem a mesma direção e sentido da do fóton, de modo que $\theta = 0$, vem (compare com a eq.(6))

$$\frac{E_r}{E_e} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}},$$

e a energia recebida é *menor* que a energia emitida (havendo um deslocamento para o vermelho da frequência do fóton). Por outro lado, se $\theta = \pi/2$, correspondendo à situação do observador se deslocar transversalmente ao fóton, então

$$\frac{E_r}{E_e} = \gamma,$$

e a energia recebida é neste caso *maior* do que a energia emitida. Note que se desenvolvermos as expressões anteriores em série de potências de v e $v \ll 1$, quando $\theta = 0$ temos $E_r/E_e \approx 1 - v$, correspondendo ao caso não relativista, e quando $\theta = \pi/2$ temos $E_r/E_e \approx 1$, mostrando que **o efeito de Doppler transversal é um efeito puramente relativista**, que só se manifesta quando não podemos desprezar as potências mais elevadas de v .

Exercício 2. Mostre que o quadrado da norma do 4-vector velocidade de uma partícula material, $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$, quando a métrica do espaço-tempo de Minkowski se escreve

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

é o invariante

$$\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2.$$

Exercício 3. Se a energia e o momento linear de uma partícula forem definidos para um referencial arbitrário por

$$(31) \quad E = m \frac{dt}{d\tau} c^2 = m\gamma c^2, \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = m\gamma \vec{v},$$

imediatamente se verifica que $(E/c, \vec{p})$ se transforma de modo semelhante ao 4-vector posição (ct, \vec{r}) . Verifique este resultado e mostre que ele permite definir um 4-vector momento com estas componentes contravariantes: $P^\alpha = (E/c, \vec{p})$, ou seja, $P^\alpha = mU^\alpha$.

Quando o sistema de partículas está isolado, embora as partículas possam interaccionar, o 4-momento total do sistema é conservado. Já sabemos que a componente temporal do 4-momento de uma partícula, P^α , é $P^0 = E$, onde $E = m\gamma(v)$ é a energia da partícula medida por um observador em relação ao qual a partícula tem velocidade \vec{v} . Por sua vez as componentes espaciais são

$$\vec{p} = m\gamma(v)\vec{v},$$

que sendo parte de P^α também se conservam.

Se definirmos $m^* = m\gamma(v)$, então $\vec{p} = m^*\vec{v}$ adquire a forma newtoniana do momento e por isso se atribui a m^* o significado de uma massa efectiva; porém, seguindo uma tendência moderna, vamos designa-la *massa aparente* e reservamos o termo *massa* para a massa em repouso ou massa própria.

Expandindo P^0 em potências de v (recorde que $v < 1$) vem

$$E = m\gamma(v) = m + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4), \text{ para pequenas } v.$$

Podemos então escrever para a energia cinética

$$(32) \quad m\gamma = m + T, \quad T = m(\gamma - 1),$$

e $E \approx$ massa + energia cinética. Isto sugere que a massa e a energia (cinética) devem ser da mesma natureza. Na realidade podemos converter uma na outra, como se pode ver pelo exemplo seguinte.

Imaginemos duas massas inelásticas (de plasticina, por exemplo) com momentos

$$m\gamma(1, -\vec{v}) \quad \text{e} \quad m\gamma(1, \vec{v}),$$

que se deslocam na mesma direcção mas em sentidos opostos e que em dado momento colidem, formando uma única massa de 4-momento $M(1, \vec{0})$. A conservação do 4-momento aplicada a P^0 exige que

$$M = 2m\gamma \approx 2\left(m + \frac{1}{2}mv^2\right),$$

ou seja, as energias cinéticas das duas massas foram incorporadas na massa única M que apresenta um excesso de massa mv^2 .

Assim, é razoável considerar massa e energia cinética como formas de energia e identificar $E = m\gamma$ como a energia total da partícula.

Chamamos a atenção para o facto de existir uma forma de energia que não contribui para a massa - a energia *potencial* (associada à posição). Na mecânica clássica, uma partícula que se move num campo gravítico (ou uma partícula carregada num campo electromagnético) diz-se que possui uma energia potencial, tal que a soma da sua energia cinética com a energia potencial é mantida constante. É claro que este conceito de conservação da energia total, tão útil para contabilizar a energia cinética da partícula, poderia igualmente ser expresso debitando o campo de uma perda de energia (correspondente ao trabalho realizado pelo campo) igual à energia cinética ganha pela partícula. Em relatividade, é preferível adoptar esta segunda alternativa, pois a verdadeira localização de qualquer parte da energia já não é uma simples convenção, visto que a energia, tal como a massa, gravita; ou seja, a energia contribui para a curvatura do espaço-tempo no local onde existe.

3.4. Força e Aceleração em RR. Vamos agora introduzir o 4-vector força, \mathbf{f} , que se define pela equação

$$(33) \quad \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau},$$

ou pelas suas componentes

$$f^\alpha = \frac{dP^\alpha}{d\tau} = m \frac{dU^\alpha}{d\tau},$$

se se consideram partículas com massa (própria) m constante¹. Neste caso, podemos escrever $f^\mu = ma^\mu$, onde $a^\mu = dU^\mu/d\tau$ é o 4-vector aceleração. Usando o facto de $U^\alpha U_\alpha = 1$, facilmente se verifica que a^μ é um 4-vector espacial, ortogonal a U^μ :

$$\eta_{\alpha\beta} U^\alpha a^\beta = 0, \quad \eta_{\mu\beta} a^\mu a^\beta < 0;$$

e, portanto, $g(f, U) = 0$.

¹No caso de uma nave espacial, queimando uma parte do seu combustível para se deslocar, já não é possível fazer $m = \text{const.}$

O exemplo mais simples de uma força na física newtoniana é a força devida ao campo gravítico. Porém, em relatividade, a gravidade não é descrita por uma força, mas pela curvatura do próprio espaço-tempo. É, por isso, preferível recorrer ao campo electromagnético. A força de Lorentz 3-dimensional é dada por

$$\vec{f} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right),$$

onde q é a carga da partícula. Com a introdução do campo electromagnético de Maxwell-Faraday, descrito pelo tensor anti-simétrico $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, onde $A_\alpha = (V, \vec{A})$ é um co-vector construído a partir do potencial escalar $V(x, y, z, t)$ e do potencial vector $\vec{A}(x, y, z, t)$, veremos mais adiante que é possível a generalização tensorial da força de Lorentz, dando-lhe a forma seguinte

$$(34) \quad f^\alpha = q U^\beta F_\beta{}^\alpha.$$

Num diagrama de Minkowski, o caminho duma partícula acelerada é descrito por uma curva onde em cada ponto U^α é um vector tangente, dirigido segundo o eixo dos tempos do referencial próprio instantâneo da partícula; o vector aceleração a_μ é ortogonal a U^μ e está assente no hiper-plano espacial de simultaneidade do observador inercial instantaneamente em repouso em relação à partícula.

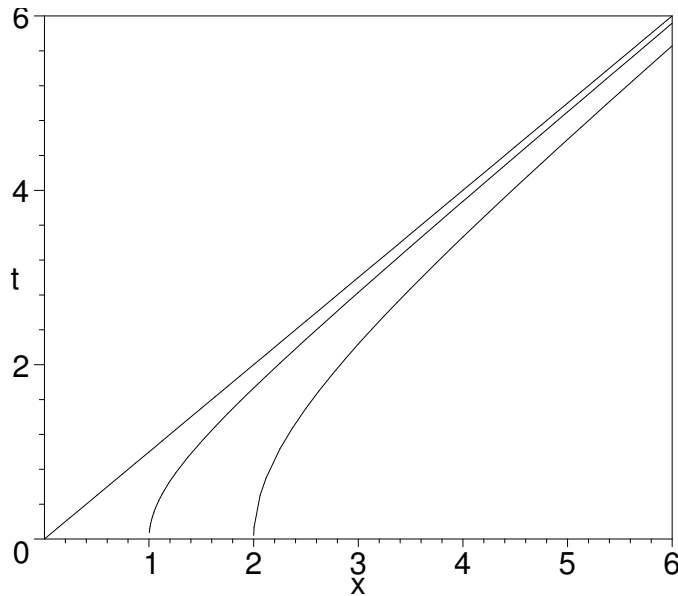


FIGURA 12. As partículas com movimentos acelerados nunca podem atingir a velocidade dos fotões.

As componentes de f num referencial de Lorentz arbitrário podem exprimir-se em função das componentes de $P^\alpha = (E, \vec{p})$,

$$(35) \quad f^\alpha = \frac{dt}{d\tau} \frac{dP^\alpha}{dt} = \gamma(v) \frac{d}{dt}(E, \vec{p}) = \gamma(v) \left(\frac{dE}{dt}, \vec{f} \right),$$

onde a 3-força relativista \vec{f} é obtida do 3-momento $\vec{p} = m\gamma(v)\vec{v}$ como na segunda lei de Newton

$$(36) \quad \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right).$$

Esta definição não tem, contudo, nenhum conteúdo físico enquanto não forem especificadas todas as propriedades da força \vec{f} . Entre as propriedades da força, que figuram na mecânica newtoniana, consta a terceira lei de Newton que estabelece a igualdade das forças de acção e reacção. Em mecânica relativista, se a acção e a reacção ocorrem em pontos diferentes do espaço, não é possível uma generalização imediata da terceira lei pois as forças não são necessariamente simultâneas. Isto torna bastante difícil a discussão dos sistemas de partículas em interacção mútua em relatividade. Mas se a lei se refere ao impacto de duas partículas, então também é definida em relatividade, sendo uma consequência imediata da Eq.(36), como mostraremos mais adiante.

Esta definição da força permite que a definição usual de trabalho seja compatível com a equivalência massa-energia. Também se pode mostrar que a definição (36) é consistente com a força de Lorentz da electrodinâmica.

O aparecimento de $\gamma(v)\vec{f}$, na parte espacial do 4-vector força f^α , indica-nos quais as propriedades de transformação de \vec{f} . Para uma transformação de Lorentz especial ('rotação' de Lorentz ou 'boost') na direcção do eixo dos xx, por exemplo, as duas equações de transformação mais simples são

$$\gamma(v')f'_y = \gamma(v)f_y \quad \text{e} \quad \gamma(v')f'_z = \gamma(v)f_z.$$

Vemos que estas componentes da força dependem da velocidade da partícula sobre a qual \vec{f} actua; portanto \vec{f} , ao contrário do que acontece na mecânica newtoniana, não é invariante.

Provemos agora a terceira lei de Newton no caso do impacto de duas partículas. Num dado referencial S , sejam as 4-forças exercidas por cada uma das partículas que colidem dadas por

$$f_{(i)}^\alpha = \gamma(v_i) \left(\frac{dE_i}{dt}, \vec{f}_i \right), \quad (i = 1, 2).$$

Quando as partículas estão em contacto: $v_1 = v_2$ e, atendendo à conservação de energia

$$\frac{d}{dt}(E_1 + E_2) = 0.$$

Portanto, a componente temporal de $f_1^\alpha + f_2^\alpha$ anula-se em S e, pelo mesmo argumento, em todos os referenciais inerciais, pois a conservação da energia deve verificar-se em todos os referenciais inerciais. Sendo assim, conclui-se que $f_1 + f_2 = 0$, porque um 4-vector que tem uma componente nula em todos os referenciais, é identicamente nulo, i.e., tem todas as suas componentes nulas. Logo, $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$, o que prova a terceira lei de Newton nas condições referidas.

Observe que esta lei foi demonstrada a partir da conservação da energia-momento, exactamente ao contrário do que se faz em mecânica newtoniana.

Se considerarmos unicamente partículas com massa (própria) m constante no tempo, sabemos que $g(f, U) = 0$ e, portanto

$$f^0 = \gamma(v)\vec{v} \cdot \vec{f},$$

ou seja, as componentes de f^α podem escrever-se

$$(37) \quad f^\alpha = \gamma(v) \left(\vec{v} \cdot \vec{f}, \vec{f} \right),$$

donde se conclui também que

$$(38) \quad \frac{dE}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}.$$

Podemos então adoptar a definição habitual de trabalho, e constatar que também em RR o trabalho elementar dW realizado por uma força \vec{f} ao deslocar o seu ponto de aplicação segundo $d\vec{r}$ é dado por

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = dE.$$

Este resultado é outra manifestação da equivalência entre massa e energia, e da sua integração sai a energia cinética:

$$(39) \quad T = E - m = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} - m.$$

3.4.1. *Massa transversal e massa longitudinal.* Voltando à Eq.(36) vemos que \vec{f} tem dois termos

$$(40) \quad \vec{f} = m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d}{dt}(m\gamma)\vec{v} = \gamma(v)m\vec{a} + (\vec{f} \cdot \vec{v})\vec{v}.$$

Assim, embora \vec{f} , \vec{a} e \vec{v} sejam coplanares, a aceleração não é em geral paralela à força que a produz. Há, no entanto, duas situações em que o é, quando \vec{f} é ortogonal ou paralela a \vec{v} . Em particular, no referencial próprio da partícula: $\vec{f} = m\vec{a}$.

Se \vec{n} é um 3-vector unitário perpendicular a \vec{v} (dirigido para o centro de curvatura da trajectória espacial descrita pela partícula), podemos escrever as componentes de \vec{f} paralela, f_{\parallel} , e normal, f_{\perp} , à velocidade \vec{v} de acordo com

$$f_{\parallel} = \vec{f} \cdot \frac{\vec{v}}{v}, \quad f_{\perp} = \vec{f} \cdot \vec{n}.$$

Podemos decompor a Eq.(40) em

$$f_{\parallel} = \gamma(v)ma_{\parallel} + f_{\parallel}v^2, \quad f_{\perp} = m\gamma^3(v)a_{\perp},$$

e

$$f_{\perp} = m\gamma(v)a_{\perp},$$

onde a_{\parallel} e a_{\perp} são, respectivamente, as componentes paralela e normal de \vec{a} em relação a \vec{v} .

Tudo se passa como se a partícula em movimento oferecesse diferentes resistências à mesma força, conforme esta actua longitudinal ou transversalmente à velocidade. Por esta razão era costume introduzir os conceitos de massa “longitudinal”: $m_l = \gamma^3(v)m$ e massa “transversal”: $m_t = \gamma(v)m$, mas estas designações caíram em desuso e não há razão para lhes atribuímos qualquer significado físico especial, tanto mais que o conceito de massa se identifica com o que vulgarmente se designa por “massa em repouso” ou “massa própria”, m , o único conceito de massa invariante e característico de cada partícula.

Para terminar, notemos ainda que multiplicando os dois membros de (40) por \vec{v} , obtemos $\vec{f} \cdot \vec{v}(1 - v^2) = m\gamma\vec{a} \cdot \vec{v}$, o que nos permite re-escrever a Eq.(40) da seguinte forma

$$(41) \quad \vec{f} = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3(\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v},$$

que mostra que se \vec{v} é constante em módulo, i.e., se $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$, então $\vec{f} = m\gamma\vec{a}$ e, portanto, $\vec{f} \cdot \vec{v} = 0$, tal como acontece na mecânica newtoniana.

Exercício 4. Tendo em atenção a definição $a = dU/d\tau$, mostre que as componentes da aceleração num referencial de Lorentz arbitrário são da forma

$$a^{\mu} = \gamma^2 (\gamma^2 \vec{a} \cdot \vec{v}, \vec{a} + \gamma^2 (\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v}),$$

em particular, no referencial próprio instantâneo da partícula $a^{\mu} = (0, \vec{a})$ e, portanto, $a^{\mu}a_{\mu} = \vec{a} \cdot \vec{a} = -a^2$.

Exercício 5. Partindo das componentes do 4-vector força

$$f^{\mu} = \gamma(v) (\vec{f} \cdot \vec{v}, \vec{f})$$

mostre que as componentes da 3-força se transformam de acordo com as seguintes expressões

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{f_x - u(\vec{v} \cdot \vec{f})}{1 - v_x u} \\ f'_y &= \frac{f_y}{\gamma(u)(1 - v_x u)} \\ f'_z &= \frac{f_z}{\gamma(u)(1 - v_x u)} \end{aligned}$$

numa transformação de Lorentz especial com velocidade u segundo o eixo dos xx .

Exercício 6. Por derivação da lei de transformação das componentes da 3-velocidade (v_x, v_y, v_z) , mostrar que as componentes da 3-aceleração \vec{a} se transformam de acordo com as expressões

$$(42) \quad \begin{aligned} a_x &= K^3 a'_x, \quad K = \frac{\sqrt{1 - u^2}}{1 + uv'_x} \\ a_y &= K^2 \left[a'_y - \frac{v'_y u}{1 + uv'_x} a'_x \right] \\ a_z &= K^2 \left[a'_z - \frac{v'_z u}{1 + uv'_x} a'_x \right] \end{aligned}$$

numa transformação de Lorentz especial segundo o eixo dos xx .

Tendo em conta as transformações das componentes da aceleração (ver exercício 6) note que \vec{a} não depende só de \vec{a}' mas também de \vec{v}' , i.e., a um movimento uniformemente acelerado em S' ($\vec{a}' = \overrightarrow{const.}$, $\vec{v}' = \vec{a}'t'$) não corresponde um movimento uniformemente acelerado em S . Portanto, ao contrário da mecânica newtoniana, o conceito de movimento uniformemente acelerado depende do referencial.

3.4.2. Aceleração Própria. Seja S o referencial do Laboratório e consideremos um ponto $\mathcal{P}(t, \vec{r})$ da linha do Universo dum partícula material acelerada em relação a S . Seja S_0 o referencial inercial dum observador \mathcal{O} , instantaneamente em repouso em relação à partícula no ponto $\mathcal{P}(t, \vec{r})$.

A velocidade de S_0 em relação a S é $\vec{u} = \vec{v}(t)$, i.e., $\vec{u} = \overrightarrow{const.}$ é igual à velocidade da partícula em relação a S no instante t . Representemos por \vec{a}_0 a velocidade da partícula em S_0 . A mecânica relativista deverá reduzir-se à mecânica newtoniana quando $v \ll 1$. Assim, o observador \mathcal{O} ligado ao referencial S_0 poderá aplicar as leis

da mecânica newtoniana para determinar a aceleração no ponto $\mathcal{P}(t, \vec{r})$ de S , i.e., na origem do seu referencial, onde a lei fundamental da dinâmica newtoniana permite escrever: $\vec{f}_0 = m\vec{a}_0$.

Conhecendo o valor da aceleração no referencial comóvel S_0 , ou seja, \vec{a}_0 , podemos determinar \vec{a} em S por intermédio das fórmulas (42), tendo em atenção que: $S' \equiv S_0$, $\vec{v}' = \vec{v}_0 = \vec{0}$ e $\vec{v} = \vec{u}$; neste caso K reduz-se a $\sqrt{1 - v^2} = \gamma^{-1}(v)$, e vem

$$(43) \quad \begin{aligned} a_x &= a_{0x}(1 - v^2)^{3/2}, \\ a_y &= a_{0y}(1 - v^2), \\ a_z &= a_{0z}(1 - v^2). \end{aligned}$$

Estas fórmulas são válidas para um ponto \mathcal{P} da linha do Universo da partícula, e a cada ponto \mathcal{P} é preciso fazer corresponder um referencial S_0 diferente, mas com os eixos semelhantemente orientados a S , e escolhidos de tal modo que a velocidade da partícula, \vec{v} , esteja dirigida segundo o eixo dos xx .

Se nos restringirmos a um movimento unidireccional, por exemplo, ao longo do eixo dos xx , podemos definir a **aceleração própria** da partícula, $a = a_{0x}$, como sendo a aceleração da partícula em relação ao seu referencial instantaneamente comóvel,

$$(44) \quad \alpha = (1 - v^2)^{-3/2} \frac{dv}{dt},$$

sendo dv/dt a aceleração da partícula em relação ao referencial do laboratório. Dados dois referenciais inerciais S e S' , tais que a direcção do movimento relativo coincida com a da partícula, tem-se

$$(45) \quad (1 - v^2)^{-3/2} \frac{dv}{dt} = (1 - v'^2)^{-3/2} \frac{dv'}{dt'}.$$

3.5. Movimento Hiperbólico. Consideremos um nave espacial que parte da Terra numa direcção que tomamos como o eixo dos xx do referencial ligado à Terra, com uma aceleração própria constante $a_{0x} = \alpha$ e mantendo uma trajectória rectilínea. No instante inicial $t = 0$, medido em S (referencial inercial ligado à Terra), temos: $x = 0, v = 0$, e $a_{0x} = \alpha$. Ao fim de um certo tempo t temos

$$a = \frac{dv}{dt} = \alpha (1 - v^2)^{3/2}$$

ou seja,

$$\frac{dv}{(1 - v^2)^{3/2}} = \alpha dt, \quad 0 \ll v < 1,$$

onde v é a velocidade em S do referencial inercial instantaneamente comóvel com a partícula.

Fazendo a substituição de variáveis: $v = \tanh \phi$, a Eq. anterior toma a forma

$$\cosh \phi d\phi = \alpha dt,$$

cuja integração dá

$$\sinh \phi = \alpha t,$$

atendendo às condições iniciais.

Para encontrar as equações paramétricas da curva descrita pela partícula no espaço-tempo de Minkowski, devemos obter agora x em função do parâmetro ϕ . Como $dx/dt = \tanh \phi$, vem

$$dx = \tanh \phi \alpha^{-1} \cosh \phi d\phi,$$

o que dá lugar a

$$\cosh \phi = \alpha x + 1,$$

atendendo novamente às condições iniciais ($x = 0, \phi = 0$).

As equações paramétricas do movimento de uma partícula acelerada, com aceleração própria constante α , são

$$(46) \quad \begin{aligned} t &= \alpha^{-1} \sinh \phi, \\ x &= \alpha^{-1} (\cosh \phi - 1). \end{aligned}$$

O sistema de Eqs.(46) representa uma hipérbole no espaço-tempo de Minkowski. Quando $t \rightarrow \infty$ ($\phi \rightarrow \infty, \tanh \phi \rightarrow 1$): $v \rightarrow 1$. Para velocidades $v \ll 1$, i.e., $\phi \ll 1$ temos

$$x \simeq \frac{\phi^2}{2\alpha}, \quad t \simeq \frac{\phi}{\alpha},$$

logo

$$x \simeq \frac{1}{2} \alpha t^2,$$

que é o movimento parabólico que se esperava.

Voltando ao sistema de Eqs. (46), e fazendo uma translação da origem

$$x \mapsto x = x + \frac{1}{\alpha}$$

podemos escrever as equações paramétricas na forma seguinte

$$(47) \quad \begin{aligned} t &= \alpha^{-1} \sinh \phi, \\ x &= \alpha^{-1} \cosh \phi. \end{aligned}$$

Nestas novas coordenadas inerciais, a equação que descreve a curva do espaço-tempo do nave espacial com aceleração própria α obtém-se por eliminação do parâmetro ϕ

$$(48) \quad x^2 - t^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

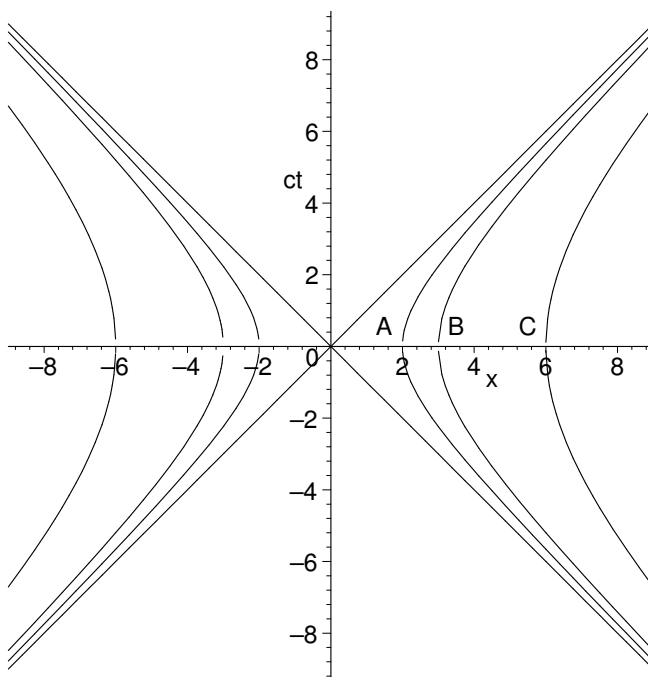


FIGURA 13. Movimentos Hiperbólicos para os valores de $\alpha = 1/2, 1/3, 1/6 \text{ ano}^{-1}$, respectivamente para os ramos de hipérbole A, B, C .

Trata-se da equação de uma hipérbole, como se vê na figura junta, com assíntotas $x = \pm t$, correspondentes às linhas do Universo dos fótons. Neste sentido, diz-se que a aceleração própria dos fótons é $\alpha = \infty$.

Vejam agora qual o significado do parâmetro ϕ . Mostremos que é proporcional ao tempo próprio τ do nave espacial

$$d\tau = dt\gamma^{-1}(v) = dt\sqrt{1-v^2},$$

se o relógio de bordo da nave espacial marca $\tau = 0$ quando $t = 0$, vem

$$\tau = \int_0^t dt\sqrt{1-v^2} = \int_0^\phi \frac{1}{\alpha} d\phi = \alpha^{-1}\phi.$$

3.5.1. *Coordenadas de Rindler.* As coordenadas (inerciais) dum observador sujeito a uma aceleração própria constante α na direcção do eixo dos xx do referencial de Lorentz S são

$$\begin{aligned} t &= \alpha^{-1} \sinh(\alpha\tau), \\ x &= \alpha^{-1} \cosh(\alpha\tau). \end{aligned}$$

Definindo $X = \alpha^{-1}$ e $T = \phi = \alpha\tau$, podemos escrever

$$\begin{aligned} t + x &= X \exp(T) \\ t - x &= -X \exp(-T), \end{aligned}$$

e, portanto, $t^2 - x^2 = -X^2$, como já era conhecido. Diferenciando as expressões anteriores facilmente se obtém

$$(49) \quad -dt^2 + dx^2 = -X^2 dT^2 + dX^2,$$

onde $X = \sqrt{x^2 - t^2}$, $0 < X < \infty$ e $T = \tanh^{-1}(t/x)$, $-\infty < T < \infty$. (T, X) são as coordenadas de um observador com aceleração própria constante (algumas vezes designado observador ‘uniformemente’ acelerado). Note que a coordenada T é do tipo tempo, enquanto que X é do tipo espaço. Esta métrica parece ter uma singularidade em $X = 0$, na medida em que η_{TT} se anula em $X = 0$, e as componentes da matriz inversa η^{ab} são singulares nesse ponto.

$$T = \alpha\tau = \text{const.} \Rightarrow \frac{t}{x} = \text{const.}$$

$$X = 0 \ (\alpha = \infty) \Rightarrow x = \pm t.$$

No diagrama de Minkowski da figura (13), os pontos de cada uma das hipérbolas A, B e C estão todos à mesma “distância” da origem (acontecimento O). A todos os pontos (acontecimentos) de uma dada hipérbole corresponde a mesma coordenada $X = \text{constante}$. São pontos da linha do Universo de um observador com aceleração própria constante $\alpha = 1/X$.

Às coordenadas (T, X) chama-se, por vezes, coordenadas de Rindler. Vejamos que este sistema de coordenadas *curvilíneas* não cobre todo o espaço-tempo de Minkowski. Para isso consideremos dois observadores \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 , sendo o primeiro um observador inercial e o segundo um observador com aceleração própria constante. As respectivas linhas do Universo estão representadas na figura (14). De início ($t < t_B$) \mathcal{O}_1 não pode ver \mathcal{O}_2 . Só a partir do instante correspondente ao acontecimento B, \mathcal{O}_1 começa a receber as primeiras informações sobre a “história” de \mathcal{O}_2 . Por sua vez \mathcal{O}_1 pode dar sinal da sua presença ao seu companheiro \mathcal{O}_2 se lhe enviar sinais luminosos antes do acontecimento A. Após esse instante \mathcal{O}_1 torna-se invisível para \mathcal{O}_2 . Entre A e B o observador inercial \mathcal{O}_1 pode enviar e receber qualquer sinal para ou de \mathcal{O}_2 . Por seu lado, o observador acelerado \mathcal{O}_2 pode enviar sinais para o seu colega inercial \mathcal{O}_1 em qualquer instante, mas está limitado à história de \mathcal{O}_1 anterior a A, e os seus sinais só chegam a \mathcal{O}_1 após o acontecimento B, como já se disse.

O conjunto de acontecimentos do espaço-tempo que definem uma fronteira a partir da qual uma determinada região do espaço-tempo deixa de ser acessível a um observador ou família de observadores chama-se um **horizonte de acontecimentos**. Geralmente, aparecem horizontes de acontecimentos se, ao longo do caminho de um

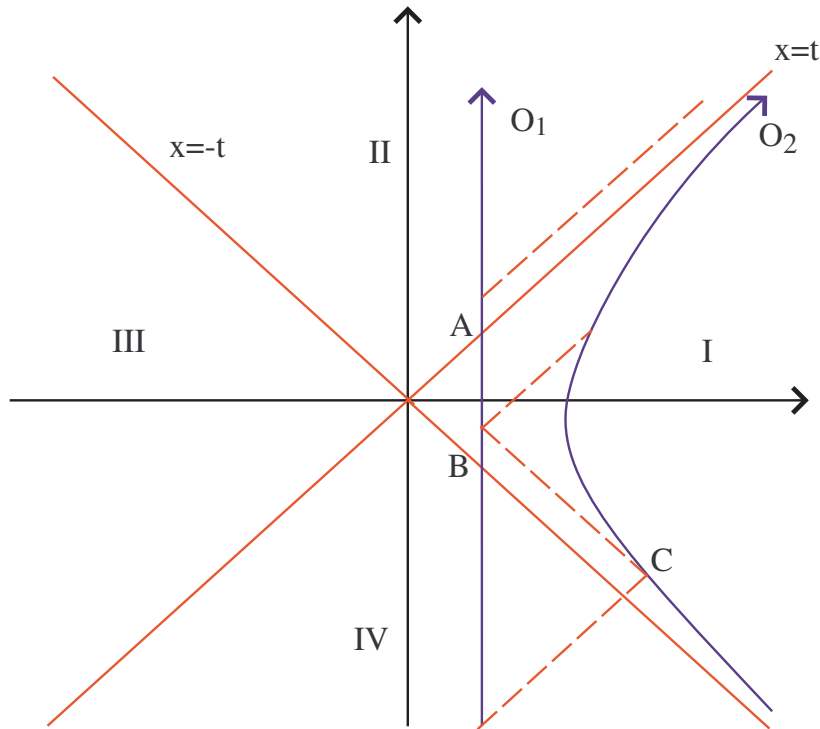


FIGURA 14. Depois do acontecimento A, na superfície do cone de luz, da linha do Universo do Observador O_1 este deixa de ser visto por O_2 .

certo observador, os cones de luz do passado ou os cones de luz do futuro não cobrem todas as regiões do espaço-tempo. No caso do espaço-tempo plano de Minkowski, os cones de luz associados com qualquer observador inercial cobrem de facto todo o Universo de Minkowski. Dado que os cones de luz do passado, associados a um observador inercial, têm esta propriedade de cobertura, um tal observador será capaz de ver, mais cedo ou mais tarde, todo e qualquer acontecimento onde quer que tenha lugar e independentemente de quando ocorreu. Igualmente, como os cones de luz do futuro de um observador inercial cobrem todo o Universo, um tal observador pode ser visto a partir de qualquer posição e em qualquer instante.

No caso do observador O_2 , os seus cones de luz do passado ou do futuro não cobrem todo o espaço-tempo, como mostram as figuras juntas; portanto, o observador acelerado não pode ver tudo e, por sua vez, pode tornar-se invisível para outros observadores acelerados. As linhas de luz $x = \pm t$ dividem o espaço-tempo de Minkowski em quatro quadrantes: I, II, III e IV. Para o observador acelerado com aceleração própria constante, a viajar no quadrante I, os acontecimentos do quadrante III são

completamente inacessíveis: não pode enviar sinais para lá nem receber sinais de lá. Pode, no entanto, receber sinais de IV e enviar sinais para II. Mas não pode receber sinais de II nem enviar sinais para IV. As duas regiões I e III definidas, respectivamente, pelos caminhos das partículas para as quais $x > 0$ e $x < 0$, são completamente desconexas: nenhum observador uniformemente acelerado, cujo caminho é uma das hipérbolas da região I, recebe qualquer informação sobre as partículas da região III. Pois não há nenhum raio luminoso que possa interceptar simultaneamente um dos caminhos da região III e um outro da região I.