8. Movimentos com Velocidade Variável

8.1 O vector aceleração

Em todos os movimentos que não sejam rectilíneos e uniformes o vector velocidade é variável com o tempo. Sendo a velocidade um vector, isto significa que ela pode variar em direcção, sentido e módulo, como se ilustra na figura 20. Por isso o vector $\Delta\vec{v}$ que exprime essa variação, pode ter uma orientação qualquer com a trajectória.

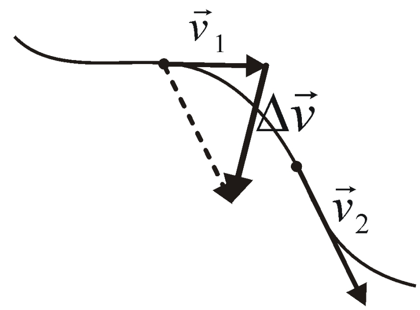

Figura 20 - Um movimento variado

Num intervalo de tempo Δt a rapidez de variação da velocidade vem dada pela grandeza **aceleração média**

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

No sistema internacional de unidades, a aceleração tem como unidade o m/s^2.

No limite, quando $\Delta t \to 0$, obtemos a aceleração instantânea ou simplesmente **aceleração**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

<u>Exemplo 11</u>

Consideremos de novo a equação de movimento no plano dada nos exemplos (1) e (6) $\vec{r}(t) = 2t\vec{u}_x + (10 - 10t^2)\vec{u}_y \; m$

Já vimos no exemplo (6) que o vector velocidade vale $\vec{v}(t) = 2\vec{u}_x - 20t\vec{u}_y \; m/s$

Por derivação, obtemos o vector aceleração:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0\vec{u}_x - 20\vec{u}_y \; m/s^2$$

A aceleração é constante, mas que tipo de movimento temos?

8.2 A aceleração escalar

Quando o movimento se define através da sua trajectória, como na figura 21, então a rapidez de variação da velocidade escalar é estudada pelas grandezas **aceleração escalar média** e **aceleração escalar**, definidas como

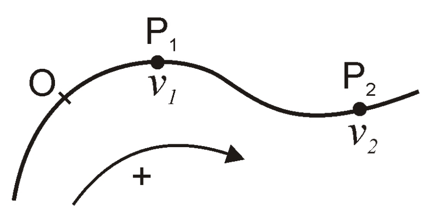

Figura 21 - Definição da aceleração escalar

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Sendo uma grandeza escalar, a aceleração escalar não tem nenhuma informação relativamente a direcção e sentido. Uma vez que o módulo da velocidade escalar iguala o valor do “conta-quilómetros”, isto é, o módulo do vector velocidade, é a aceleração escalar que nos indica se o movimento é variado ou uniforme. Sendo variado, ele pode ser acelerado ou retardado, conforme o módulo da velocidade aumenta ou diminui com o tempo. Atendendo a que a velocidade escalar tem sinal, que indica o sentido do movimento, é apenas a combinação dos sinais da velocidade e aceleração escalares que nos podem dizer que tipo de movimento temos, acelerado ou retardado.

Suponhamos que a velocidade escalar é positiva. Se ela aumenta em valor numérico também aumenta em módulo e a aceleração escalar é positiva. O movimento é acelerado. Se a velocidade escalar diminuir em módulo, também diminui em valor e a aceleração escalar é negativa. O movimento é retardado.

Quando a velocidade escalar é negativa, ela aumenta em módulo se diminuir em valor numérico, isto é, o movimento é acelerado se a aceleração escalar for negativa. Do mesmo modo, se a aceleração escalar for positiva é porque a velocidade aumenta de valor, isto é, diminui em módulo, e por isso o movimento é retardado.

Em síntese, um movimento será acelerado se a velocidade e aceleração escalares tiverem o mesmo sinal, ambos positivos ou ambos negativos. Se a velocidade e aceleração tiverem sinais contrários, então o movimento é retardado.

Exemplo 12

Consideremos um movimento descrito pela abcissa sobre a trajectória através da lei:

$$s = 12t - t^3 \ m$$

Vamos tentar caracterizar este movimento ao longo do tempo. Para isso começamos por calcular a velocidade escalar e depois a aceleração escalar:

$$v = \frac{ds}{dt} = 12 - 3t^2 \ m/s$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -6t \ m/s$$

Como vemos, a aceleração escalar é sempre negativa, à excepção do instante inicial em que é nula. A aceleração não é constante e por isso o movimento é variado mas não uniformemente variado. Relativamente à velocidade, a sua expressão é a de um polinómio do 2º grau, ou de uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Por isso sabemos que a velocidade será positiva entre as raízes do polinómio e negativa no intervalo fora das raízes. Fazendo $v=0$ obtemos a solução $t = \pm 2$. Obtemos assim que $v > 0 \text{ se } t \in \left]-2,2\right[$ e $v < 0 \text{ se } t \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]-2,+\infty\right[$. Conjugando este resultado com o valor da aceleração (ver tabela em baixo), podemos concluir que o movimento do corpo é retardado, no sentido positivo, de 0 até aos $2s$, invertendo-se a partir daí o seu sentido. Depois dos $2s$ o movimento é acelerado e no sentido negativo.

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 2	2 a $+\infty$
v	–	+	+	–
a	+	+	–	–
movimento	retardado	acelerado	retardado	acelerado

8.3 O movimento uniformemente variado

Um movimento diz-se **uniformemente variado** se ele se processar com aceleração escalar constante. Como já vimos, a aceleração escalar pode ser positiva ou negativa mas isso nada nos diz sobre o tipo de movimento que tem o corpo. É necessário conhecer também o sinal da velocidade escalar para caracterizar completamente o movimento, como acelerado ou retardado. Em particular, quando atiramos um objecto ao ar na vertical, o seu movimento processa-se com aceleração constante (a aceleração da gravidade como veremos num próximo parágrafo) mas o movimento é inicialmente retardado (na subida) para passar depois a acelerado (na descida).

O movimento uniformemente variado é um movimento que se processa com a aceleração escalar constante. Fazendo $t_0 = 0$ na definição de aceleração escalar média e sabendo que no movimento uniformemente variado a aceleração e a aceleração média são idênticas, podemos deduzir a lei das velocidades deste movimento:

$$\Delta t = t \qquad \Delta v = v - v_0 \qquad \rightarrow \qquad a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \qquad \rightarrow$$

$$a = cte \qquad e \qquad v = v_0 + at$$

A mesma lei pode ser deduzida usando a relação entre velocidade e aceleração e a operação de primitivação:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = \int_0^t a dt = v_0 + at$$

Se $a = cte$ então $v = v_0 + at$ é a **lei das velocidades** do movimento uniformemente variado. Integrando novamente obtemos então a **lei do movimento** uniformemente variado:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad s = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt \quad e \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

As 3 leis do movimento uniformemente variado são em síntese

$$a = cte \qquad v = v_0 + at \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Estas leis são válidas, quer o movimento seja rectilíneo quer seja curvilíneo.

A lei das velocidades dá-nos a velocidade em função do tempo, enquanto que a lei do movimento nos dá a posição em função do tempo. Eliminando o tempo de ambas as equações, obtemos uma nova expressão que relaciona a velocidade com a posição:

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{v - v_0}{a} \\ s - s_0 = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \end{cases} \cdots$$

$$v^2 = v_0^{\ 2} + 2a\Delta s$$

Para melhor compreendermos a relação que existe entre a aceleração escalar, o vector aceleração e a variação do vector velocidade, vamos estudar em detalhe dois movimentos particulares: (i) o movimento rectilíneo variado, onde a velocidade apenas varia em módulo, mas não em direcção; (ii) o movimento circular uniforme, onde a velocidade varia em direcção, mas não em módulo.

8.4 O movimento rectilíneo variado e a aceleração tangencial

No movimento rectilíneo variado, a velocidade apenas varia em módulo, mas não em direcção, como se indica na figura 22. O vector variação da velocidade tem a direcção da trajectória, tendo o mesmo sentido da velocidade, se o movimento for acelerado (caso da figura 22), e o sentido contrário, se o movimento for retardado. Como o vector aceleração média e aceleração instantânea têm a mesma direcção e sentido que $\Delta\vec{v}$, estas conclusões estendem-se também à aceleração.

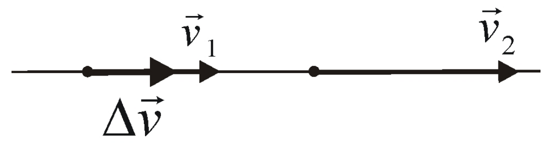

Figura 22 - A variação da velocidade no movimento rectilíneo variado

Num movimento rectilíneo variado, a aceleração é sempre tangente à trajectória, isto é, tem a direcção da trajectória. Se os vectores velocidade e aceleração tiverem o mesmo sentido, o movimento será acelerado, se tiverem sentidos contrários, o movimento será retardado.

Como se tem ainda no movimento rectilíneo que

$$|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = |v_2 - v_1| = |\Delta v|$$

facilmente verificamos que no movimento rectilíneo variado se tem a igualdade

$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \left|\frac{dv}{dt}\right| = |a|$$

Isto é, no **movimento rectilíneo a aceleração é tangencial e o seu módulo é igual à aceleração escalar**. Ou seja, quando a velocidade não varia em direcção mas apenas em módulo, como num movimento rectilíneo, o vector aceleração tem a direcção tangencial e o seu módulo é igual ao módulo da aceleração escalar.

8.5 O movimento circular uniforme e a aceleração normal

No movimento circular uniforme, a velocidade varia em direcção, mas não em módulo, como se indica na figura 23. A variação da velocidade entre 2 instantes, $\Delta\vec{v}$, é oblíqua em relação à trajectória, e pode-se mostrar que no

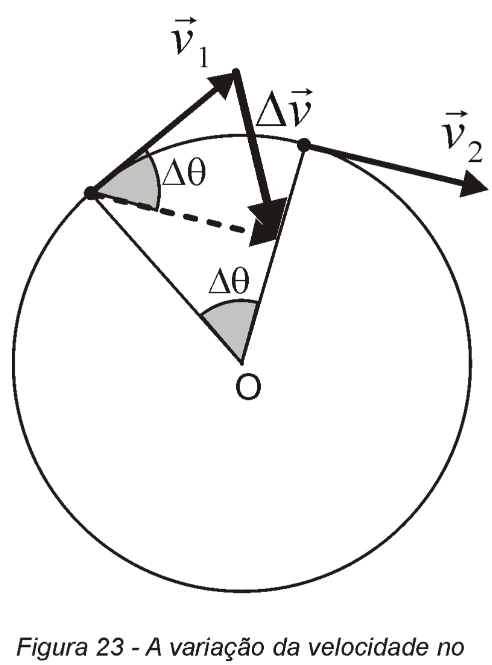

Figura 23 - A variação da velocidade no movimento circular uniforme limite, quando $\Delta t \to 0$, se tem que $d\vec{v}$ é perpendicular à trajectória.

Como a aceleração tem a direcção de $\Delta\vec{v}$, podemos concluir que no movimento circular uniforme, onde apenas se tem variação em direcção da velocidade mas não variação em módulo, o vector aceleração é perpendicular à trajectória, apontando para o interior da sua curvatura, neste caso, para o centro da circunferência. Isto é, **no movimento circular e uniforme a aceleração é normal** e **centrípeta**.

Para saber o seu módulo, atentemos de novo na figura 23. Por semelhança com o comprimento do arco numa circunferência, tem-se que

$$|\Delta\vec{v}| \approx |\vec{v}|\Delta\theta$$

No limite, quando $\Delta t \to 0$, obtemos mesmo a igualdade para o diferencial

$$|d\vec{v}| = |\vec{v}|d\theta$$

Por isso, podemos fazer a seguinte inferência para o módulo da aceleração no movimento circular uniforme

$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = |\vec{v}|\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = |\vec{v}||\omega|$$

Como no movimento circular uniforme se tem $\omega = v/r$ onde r é o raio da trajectória, obtemos finalmente

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{r}$$

8.6 A aceleração no caso geral

Num movimento variado e curvilíneo, caso mais geral, o vector velocidade varia simultaneamente em módulo e direcção. Por analogia com os dois movimentos vistos anteriormente, deveremos ter no caso geral duas componentes da aceleração a actuar: (i) a **aceleração tangencial**, $\vec{a}_t$, que mede a variação em módulo da velocidade; (ii) **a aceleração normal**, $\vec{a}_n$, que mede a variação em direcção do vector velocidade. Para representar estas duas componentes do vector aceleração, usamos um novo sistema de referência ligado à trajectória, com uma base de dois versores, $\vec{u}_t$ e $\vec{u}_n$, como se indica na figura 24. Neste sistema de eixos a velocidade é sempre tangente à trajectória e vem dada por (figura 24)

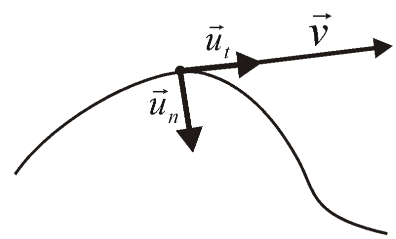

Figura 24 - Definição dos versores tangente e normal à trajectória

$$\vec{v} = v\vec{u}_t \qquad ou \qquad \vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v}$$

A representação da aceleração e das suas componentes tangencial e normal, encontra-se na figura 25. Podemos assim escrever

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n$$

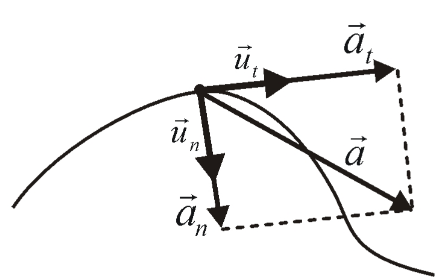

Figura 25 - A aceleração e as suas componentes tangencial e normal à trajectória

Usando o exemplo dos movimentos

estudados anteriormente, podemos escrever para o módulo de cada uma das componentes da aceleração as expressões

$$|\vec{a}_t| = |a| = \left|\frac{dv}{dt}\right|$$

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{r}$$

$$|\vec{a}|^2 = a_t^{\ 2} + a_n^{\ 2}$$

Recordemos que a aceleração normal aponta sempre para a curvatura da trajectória.

No caso de uma trajectória qualquer, r representa o **raio de curvatura**, isto é, o raio da circunferência que melhor se ajusta à trajectória nesse ponto, como se ilustra na figura 26. Se a trajectória for rectilínea, o raio de curvatura é ∞ e a aceleração normal é nula, como seria de esperar.

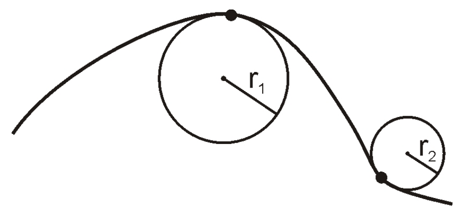

Figura 26 - O raio de curvatura

<u>Exemplo 13</u> – Calcular o módulo do vector aceleração
Consideremos o movimento dado no exemplo 12 que se caracteriza pelas seguintes leis do movimento, velocidade e aceleração

$$s = 12t - t^3 \ m$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 12 - 3t^2 \ m/s$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -6t \ m/s$$

Vamos admitir ainda que se trata de um movimento circular de raio 10 metros. Neste caso, usando as propriedades do vector aceleração, podemos calcular o seu módulo em qualquer instante. Vamos exemplificar, calculando o módulo do vector aceleração no instante $t=1\ s$. Neste instante a velocidade escalar vale $v(1) = 9\ m/s$ e por consequência, o módulo da aceleração normal é dado por

$$a_n(1) = \frac{v^2}{r} = \frac{9^2}{10} = 8.1\ m/s$$

Como a aceleração escalar vale no mesmo instante $a(1) = -6\ m/s^2$ teremos então para o módulo do vector aceleração o valor

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^{\ 2} + a_n^{\ 2}} = \sqrt{6^2 + 8.1^2} = 10.1\ m/s^2$$

8.7 Interpretação de gráficos

Num gráfico apenas podemos representar grandezas escalares, ou as componentes de grandezas vectoriais. O seu significado depende do valor que toma a grandeza assim como a sua evolução com o tempo, se é crescente, decrescente ou constante.

A figura 27 pretende ilustrar as diferentes formas que estes gráficos podem apresentar. Cada número identifica um segmento do gráfico e um movimento diferente que iremos de seguida caracterizar. Esta caracterização depende da grandeza que se está a estudar.

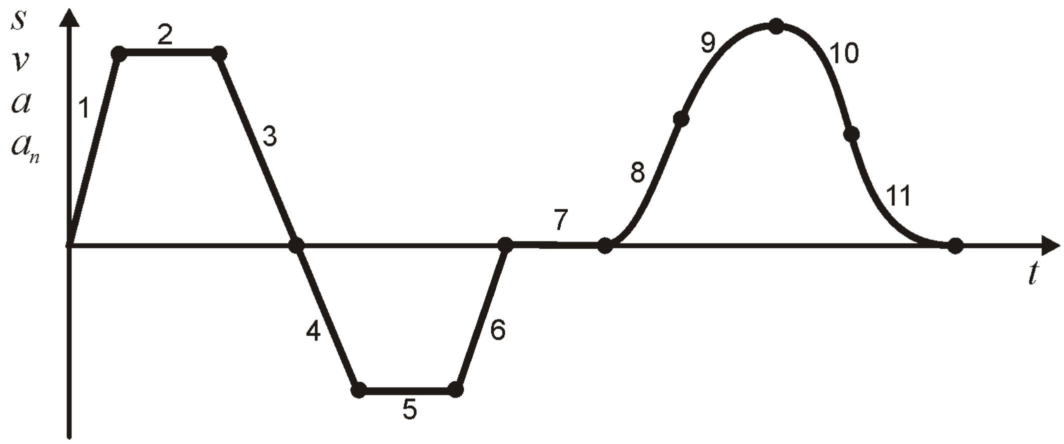

Figura 27 - Representação gráfica da variação de diversas grandezas cinemáticas com o tempo

s – a abcissa sobre a trajectória

Neste tipo de gráfico, o declive representa a velocidade escalar.

- Os movimentos (1) e (6) são movimentos uniformes no sentido (+) da trajectória. O gráfico é uma recta com declive positivo.
- Os movimentos (3) e (4) são também movimentos uniformes, mas no sentido (–) da trajectória.
- Os movimentos (2), (5) e (7) indicam que o corpo está parado.
- Os movimentos (8), (9), (10) e (11) são movimentos variados. Se as figuras representarem porções de parábola, então os movimentos seriam uniformemente variados.
- Os movimentos (8) e (10) são acelerados porque o declive está a aumentar em módulo, isto é, a velocidade escalar aumenta em módulo.
- Os movimentos (9) e (11) são retardados porque o declive está a diminuir em módulo, isto é, a velocidade escalar diminui em módulo.

v – a velocidade escalar

Neste tipo de gráfico, o declive representa a aceleração escalar.

- Os movimentos (2) e (5) são movimentos uniformes, a velocidade é constante, mas com sentidos opostos, (2) no sentido + e (5) no sentido -.
- Os movimentos (1) e (4) são movimentos uniformemente acelerados. A aceleração é constante em ambos e tem o mesmo sinal da velocidade, + em (1) e – em (4).
- Os movimentos (3) e (6) são movimentos uniformemente retardados. A aceleração é constante em ambos mas tem sinal contrário ao da velocidade.
- No movimento (7) o corpo está em repouso, a velocidade é nula.
- Os movimentos (8), (9), (10) e (11) são movimentos variados. (8) e (9) são

acelerados, pois a velocidade aumenta em módulo, enquanto que (10) e (11) são retardados, pois a velocidade diminui em módulo.

a – a aceleração escalar

Neste tipo de gráfico apenas podemos dizer se um movimento é uniforme ($a=0$), uniformemente variado ($a=cte$) ou simplesmente variado. Não é possível saber se um corpo está com movimento uniforme ou em repouso, As duas situações são indescerníveis. Nos movimentos variados, o conhecimento da aceleração escalar apenas não permite identificar os movimentos acelerados e retardados. Esta identificação só é possível se for conhecido também o sinal da velocidade escalar.

- No movimento (7) o corpo ou está em repouso ou tem movimento uniforme.
- Os movimentos (2) e (5) são uniformemente variados, mas sem saber o sinal da velocidade, nada podemos dizer relativamente ao tipo de movimento, se é acelerado ou retardado.
- Todos os restantes movimentos são variados.

a_n – a aceleração normal

O valor da aceleração normal apenas nos informa relativamente à forma da trajectória, rectilínea ($a_n=0$) ou curvilínea ($a_n>0$). Por isso, apenas o movimento (7) é rectilíneo (ou o corpo está em repouso) enquanto que todos os restantes movimentos serão curvilíneos.

9. Movimentos de projécteis

9.1 As equações gerais do movimento

Todos os corpos que se deslocam nas proximidades da superfície da Terra estão sujeitos a uma aceleração constante, que se designa por aceleração da gravidade. Em Portugal, o seu valor é aproximadamente de $9.80\ m/s^2$. A letra usual para representar a aceleração da gravidade é a letra $\vec{g}$. A direcção vertical em cada ponto da Terra é definida pela própria direcção do vector $\vec{g}$. Usando o sistema de eixos indicado na figura 28, a aceleração da gravidade toma a expressão

$$\vec{g} = -g\vec{u}_y = -9.8\vec{u}_y\ m/s^2$$

O movimento que os corpos têm sujeitos a uma aceleração constante, depende da orientação do lançamento, como iremos ver já de seguida. Se o movimento é apenas vertical, então ele será uniformemente retardado na subida e uniformemente acelerado na descida. Se o lançamento for oblíquo ou horizontal, o movimento é em geral variado.

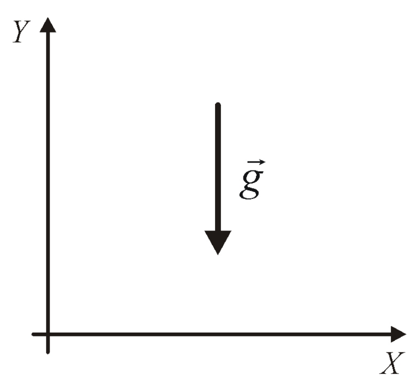

Figura 28 - A aceleração da gravidade

Se desprezarmos o efeito do atrito, então é fácil deduzir as leis porque se regem o movimento dos projécteis na vizinhança da superfície do Globo. Estas leis apenas se aplicam a movimentos de curto alcance, para desprezar a curvatura da Terra, e também para não ser necessário considerar a variação da gravidade com a latitude e com a altitude.

Comecemos pelo vector velocidade.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \int_0^t \vec{a}dt = \int_0^t -g\vec{u}_y dt = \vec{v}_0 - gt\vec{u}_y$$

Decompondo o vector velocidade inicial, $\vec{v}_0$ nas suas componentes horizontal e vertical, como mostra a figura 29,

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0y}\vec{u}_y \quad v_{0x} = v_0 \cos\alpha \quad v_{0y} = v_0 sen\alpha$$

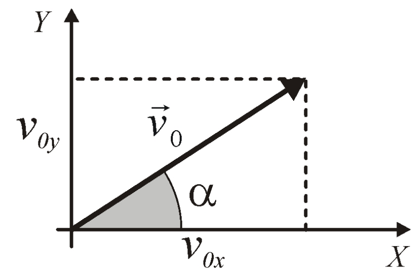

Figura 29 - A velocidade inicial

temos as correspondentes leis escalares para a aceleração e velocidade

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

Para obter a lei do movimento, basta fazer uma nova integração,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \int_0^t \vec{v}dt = \int_0^t (\vec{v}_0 - gt\vec{u}_z)dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2\vec{u}_z$$

Nesta equação $\vec{r}_0$ representa a posição inicial do corpo. A equação escalar do movimento vale então

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Olhando para as equações escalares, podemos dizer que o movimento dos projécteis resulta da composição de dois movimentos, um uniforme segundo o eixo horizontal, dos XX, e um outro uniformemente variado, segundo o eixo vertical, o dos YY.

Todos os problemas de projécteis se resolvem usando este conjunto de equações.

9.2 O lançamento vertical e a altura máxima do projéctil

No lançamento vertical, apenas interessam as equações segundo o eixo Y, uma vez que não há velocidade inicial nem movimento com a componente X. O movimento resultante é por isso rectilíneo e uniformemente variado segundo Y

$$a_y = -g \qquad v_y = v_{0y} - gt \qquad y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Se o lançamento inicial for para baixo, $v_{0y} < 0$, o movimento será sempre acelerado, a velocidade decresce sempre em valor e aumenta constantemente em módulo.

Se o lançamento inicial for para cima, $v_{0y} > 0$, então o movimento ascendente é uniformemente retardado até se atingir a **altura máxima**, instante a partir do qual o movimento inverte o sentido e passa a ser descendente e uniformemente acelerado (ver figura 30). No ponto

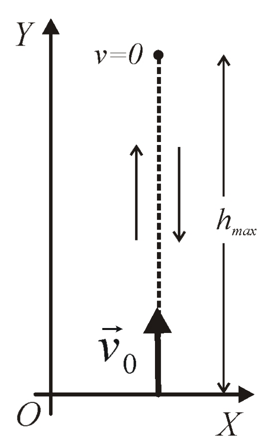

Figura 30 - Lançamento vertical de um projéctil mais alto da trajectória, o ponto de altura máxima, verifica-se que momentaneamente a velocidade vertical se anula

$$v_y = 0 \qquad v_{0y} - gt = 0 \quad \rightarrow \quad t_h = \frac{v_{0y}}{g}$$

É esta a condição que usamos para determinar t_h , o instante em que o corpo atinge a altura máxima. Se usarmos, como é usual, a origem do referencial coincidente com o ponto de lançamento do projéctil, $y_0 = 0$, então a altura máxima do projéctil obtém-se facilmente por substituição do tempo na equação do movimento

$$h_{\max} = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_{0y}^2}{g^2} \qquad h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} \qquad h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Consideremos agora o movimento de queda a partir deste ponto onde o projéctil atinge a altura máxima. Trata-se de um movimento sem velocidade inicial mas com uma altura inicial. A sua equação do movimento será

$$y = \frac{v_{0y}^2}{2g} - \frac{1}{2}gt^2$$

Igualando esta expressão a zero obtemos o tempo que o projéctil demora a cair, o tempo de queda t_q.

$$0 = \frac{v_{0y}^2}{2g} - \frac{1}{2}gt^2 \qquad t^2 = \frac{v_{0y}^2}{g^2} \quad \rightarrow \quad t_q = \frac{v_{0y}}{g}$$

Isto é, o projéctil demora exactamente o mesmo tempo a subir que a descer. Se usarmos este tempo para determinar a velocidade com que o projéctil atinge o solo, obtemos

$$v_y(t_q) = -g\frac{v_{0y}}{g} = -v_{0y}$$

Ou seja, o corpo na descida atinge exactamente a mesma velocidade, em módulo, que tinha na subida.

Estes exercícios ilustram duas propriedades do movimento de projécteis sujeitos a uma aceleração constante:

(i) entre dois pontos à mesma altura, o tempo de subida é exactamente igual ao tempo de descida;

(ii) a velocidade que o projéctil toma na subida e na descida em dois pontos à mesma altura é igual em módulo.

Estas propriedades são gerais e não se restringem ao lançamento vertical e por isso poderão ser úteis na resolução de problemas que envolvem movimentos de projécteis com lançamento oblíquo.

9.3 O lançamento horizontal e o alcance do projéctil

No lançamento horizontal apenas a componente horizontal da velocidade inicial é diferente de zero. Por isso, as equações que regem o movimento do projéctil tomam a expressão

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = -gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Se considerarmos, por simplicidade, um movimento que é executado partindo de uma altura inicial h e da origem do eixo dos XX (ver figura 31), as equações do movimento tomam a expressão simplificada

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Tirando o tempo da 1ª equação e substituindo na 2ª, obtemos a equação da trajectória do projéctil

$$y = h - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{0x}^2} \quad \rightarrow \quad y = a - bx^2$$

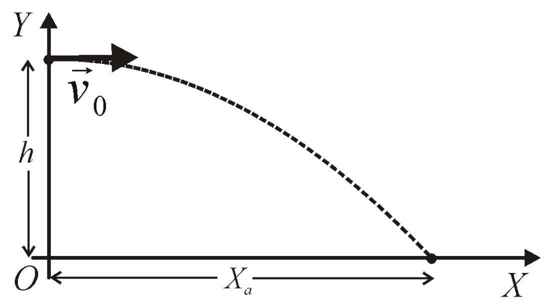

Figura 31 - Lançamento horizontal de um projéctil

Trata-se da equação de uma parábola, com a concavidade voltada para baixo. Esta é uma propriedade dos movimentos dos projécteis em geral, com excepção do lançamento vertical que vimos anteriormente: a trajectória dos projécteis sujeitos a uma aceleração vertical constante é uma parábola.

Para determinar o tempo que o projéctil demora a cair, isto é, a atingir a altura zero, basta igualar a equação do movimento vertical a zero

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad t^2 = \frac{2h}{g} \qquad t_q = \sqrt{2h/g}$$

À distância horizontal percorrida pela projéctil até atingir o nível zero, chamamos de **alcance do projéctil**. O seu cálculo deriva da sua própria definição

$$X_a = v_{0x}t_q = v_{0x}\sqrt{2h/g}$$

9.4 Lançamento oblíquo

A situação mais interessante ocorre quando o lançamento oblíquo é feito para cima e para o lado. Como se mostra na figura, o movimento terá duas componentes, uma primeira ascendente e outra descendente. Para simplificar o estudo, vamos admitir que o ponto de lançamento coincide com a origem do sistema de eixos XY.

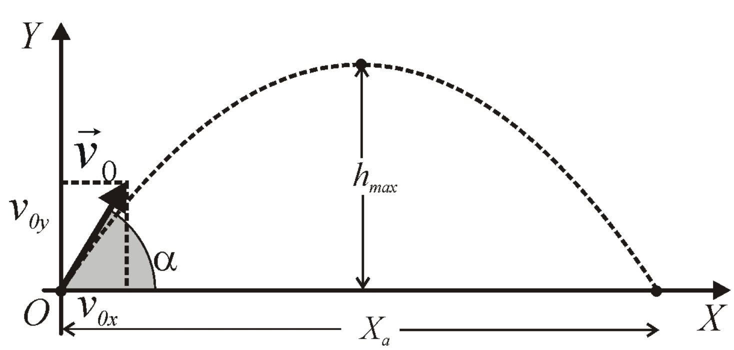

Figura 32 - Lançamento oblíquo de um projéctil

Neste caso, as equações do movimento tomam a expressão

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Tirando o tempo da 1ª equação e substituindo na 2ª, obtemos a equação da trajectória do projéctil

$$y = x\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{0x}^2} \quad \rightarrow \quad y = ax - bx^2$$

Trata-se da equação de uma parábola, com a concavidade voltada para baixo, passando na origem.

Para determinar o ponto mais alto da trajectória, seguimos o mesmo procedimento que usámos anteriormente para o lançamento vertical. Primeiro determinamos o tempo de subida, t_h ,usando a propriedade que no ponto mais alto da trajectória, a componente vertical da velocidade é nula, $v_y = 0$.

$$v_{0y} - gt = 0 \quad \rightarrow \quad t_h = \frac{v_{0y}}{g}$$

Agora, a altura máxima do projéctil obtém-se, como antes, por substituição do tempo na equação do movimento vertical

$$h_{\max} = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_{0y}^2}{g^2} \qquad h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} \qquad h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Para determinar o alcance horizontal deste movimento, socorremo-nos da propriedade enunciada anteriormente, que entre dois pontos de igual altura, o tempo de subida é igual ao tempo de descida. Isto significa que o projéctil lançado a partir do solo, demora exactamente o mesmo tempo na trajectória ascendente que na trajectória descendente. Assim, o tempo de queda, t_q , é igual ao dobro do tempo de subida. Por isso o alcance toma então a expressão

$$t_q = 2\frac{v_{0y}}{g} \qquad X_a = v_{0x}t_q = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Usando a expressão das componentes da velocidade inicial em função do módulo da velocidade inicial, v_0 , e do ângulo de lançamento, α, obtemos para o alcance horizontal a expressão

$$X_a = \frac{2v_0^2 sen\alpha\cos\alpha}{g}$$

Usando a identidade trigonométrica $sen(2\alpha) = 2sen\alpha\cos\alpha$ podemos simplificar a expressão do alcance

$$X_a = \frac{v_0^2}{g}sen(2\alpha)$$

Verificamos como o alcance horizontal depende do módulo da velocidade inicial e do ângulo de lançamento. Na ausência de atrito, aproximação que temos usado sempre, o alcance horizontal máximo obtém-se quando $sen2\alpha = 1$, ou seja, quando o ângulo de lançamento for exactamente 45º, $\alpha = 45^{\circ}$. Nestas circunstâncias, o alcance horizontal máximo vale

$$X_{a(\max)} = \frac{v_0^2}{g}$$

<u>Exemplo 14</u> – Piroclastos lançados numa erupção vulcânica.
Um geólogo ao observar uma erupção vulcânica, verifica que os piroclastos lançados na vertical atingem uma altura máxima de 100 m. Considerando que os mesmos piroclastos também são lançados em todos as direcções, qual é a distância de segurança a que se deve colocar o observador?
Este problema é resolvido por partes. Em primeiro lugar, usando a informação relativa ao lançamento vertical e fazendo as mesmas deduções que foram feitas no parágrafo 9.2, chegamos à expressão que relaciona a altura máxima com a velocidade vertical de lançamento, que neste caso coincide com o módulo da velocidade de lançamento

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh_{\max}}$$

Calculamos assim que a velocidade de lançamento, em módulo, vale $44.3\ m/s$.
Aplicando agora os cálculos efectuados no parágrafo 9.4 podemos deduzir que o alcance máximo horizontal ocorre para um ângulo de lançamento de 45º, o que dará no nosso caso, o seguinte valor

$$X_{a(\max)} = \frac{v_0^2}{g} = 200\,m$$

Esta é a distância mínima de segurança para um observador da erupção vulcânica.