

Mecânica Quântica: 2014-2015

1ª Série

1. Considere o modelo de Bohr para o átomo de hidrogénio.
(*vide le Bellac, ex. 1.5.2*)

1.1. Mostre que o raio de Bohr, o menor raio que verifica a condição $2\pi r = n\lambda$, é dado por $\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \approx 0.53$ Angstrom.

1.2. Mostre que os níveis de energia são da forma $E_n = -\frac{R}{n^2}$, onde R é a constante de Rydberg $\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2}$.

1.3. Determine o comprimento de onda dos fótons que são emitidos nas transições $n = 2 \rightarrow n = 1$ e $n = 3 \rightarrow n = 2$, e situe-os em relação ao espectro da luz visível.

2. A fim de ter uma ideia das grandezas de alguns parâmetros quânticos associados a várias partículas, determine, utilizando a relação de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (1)$$

o comprimento de onda de:

(*vide CT¹, Compl. A₁, pág. 42*)

2.1. Uma partícula de poeira com diâmetro de $\sim 1\mu m$, cuja massa é da ordem de grandeza de $m \approx 10^{-15}kg$, e que se move com uma velocidade de $v \approx 1mm/s$. (Note que λ é desprezável face às dimensões da partícula de poeira).

2.2. Um neutrão térmico ($m_n \simeq 1.67 \times 10^{-27}kg$) cuja velocidade, correspondente à energia térmica média, a uma temperatura T , é dada por

$$\frac{1}{2}m_nv^2 = \frac{p^2}{2m_n} \simeq \frac{3}{2}kT, \quad (2)$$

em que k é a constante de Boltzmann ($k \simeq 1.38 \times 10^{-23}J/K$).

2.3. Um electrão ($m_e \simeq 0.9 \times 10^{-30}kg$), que é acelerado através de um potencial eléctrico V . Note que o electrão adquire uma energia cinética de $E = qV$, em que q é a sua carga eléctrica ($q = 1.6 \times 10^{-19}C$).

2.4. Um electrão relativista, com energia da ordem de grandeza de $E \sim 1GeV = 10^9eV$ ($1eV = 1.6 \times 10^{-19}J$), cuja velocidade é próxima da

¹Cohen-Tannoudji

velocidade da luz, c . Relembre que a energia de uma partícula relativista com a massa em repouso, m_0 , é dada por $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$. No entanto, no presente caso, temos $m_e c^2 \simeq 0.5 \times 10^6 eV$, o que é desprezável face à energia de $1 GeV$. Deste modo, podemos considerar a aproximação $E \simeq pc$.

3. Efeito fotoelétrico.

A energia máxima de electrões emitidos de uma amostra de potássio é de $2.1 eV$ e $0.5 eV$, quando este é iluminado por luz com um comprimento de onda de $3 \times 10^{-7} m$ e $5 \times 10^{-7} m$, respetivamente. Utilize estes resultados para determinar os valores da constante de Planck e a energia mínima necessária para libertar um electrão de um átomo.

(*vide* **Rae, ex. 1.1**)

4. Considere que o fluxo de energia associado a um raio luminoso de comprimento de onda $3 \times 10^{-7} m$ é $10 W m^{-2}$.

(*vide* **Rae, ex. 1.2**)

4.1. Calcule, classicamente, o tempo necessário para que energia suficiente atinja o átomo de potássio, com um raio de $2 \times 10^{-10} m$, de modo que um electrão seja emitido.

4.2. Determine a taxa de emissão média de electrões se esta luz atingisse uma amostra de potássio com $10^{-3} m^2$ de área.

5. Efeito de Compton.

Um fóton de raio-X, com um comprimento de onda $1.0 \times 10^{-12} m$ incide num electrão estacionário. Determine o comprimento de onda do fóton disperso, se for detetado a um ângulo, em relação à radiação incidente, de: (i) 60° ; (ii) 90° ; (i) 120° .

(*vide* **Rae, ex. 1.3**)

6. Considerando as restrições impostas pela relação de incerteza

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar, \tag{3}$$

verifique que:

(*vide* **CT, Compl. B₁, pág. 45**)

6.1. A relação de incerteza é completamente negligível a uma escala macroscópica. Para este fim, considere uma partícula de poeira, cujo diâmetro é de $1 \mu m$ e a massa é de $m \approx 10^{-15} kg$, que se move com uma velocidade de $v \simeq 10^{-3} m/s$.

6.2. A relação de incerteza rejeita o modelo semi-clássico de Bohr. Relembre que este último permite órbitas que são definidas *à priori* por regras de quantização, nomeadamente, que o raio r de uma órbita circular e o momento linear, $p = mv$, de um elétron que descreve uma trajetória ao longo da órbita obedecem à regra de $pr = n\hbar$ (em que $n \in \mathbb{N}$).

7. Considere a figura 1.2, representada em Alistair Rae, na qual um feixe de neutrões com um determinado momento é difratado por uma única fenda. Demonstre que um valor aproximado do momento dos neutrões, numa direção perpendicular à fenda e ao feixe incidente, pode ser derivado do padrão de difração de uma única fenda.

(vide **Rae, ex. 1.4**)

8. Amplitudes de probabilidade.

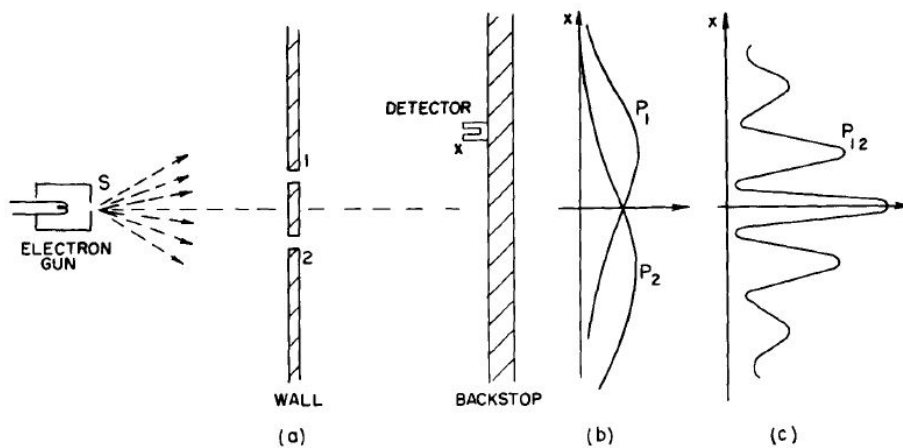


Figura 1: Experiência de interferência.

8.1. Atendendo aos padrões de interferência representados na figura 1, é possível estimar o comprimento de onda associado às funções de amplitude ϕ_1 e ϕ_2 . Seja d a distância entre os centros das fendas; L a distância entre a parede (wall) e o alvo (backstop); e x a distância do centro do alvo ao primeiro mínimo de P_{12} . Estime a expressão de λ se $L \gg d$.

(vide **Feynman, ex. 70.1**)

8.2. Considere a experiência representada na figura 1, e assumamos que as distâncias da fonte à parede e da parede ao alvo são muito superiores às distâncias entre as fendas. Assumamos também que a espessura das fendas é negligível relativamente à distância entre as fendas.

(*vide Feynman, ex. 70.2*)

8.2.1 O que ocorre ao padrão de interferência de P_{12} se a fonte se move uma distância de D para cima?

8.2.2 O que ocorre ao padrão de interferência se a distância entre as fendas duplica?

8.2.3 O que ocorre ao padrão de interferência se a espessura da fenda 1 é o dobro da fenda 2?

9. Considere que uma função de onda é dada por $\psi(x, t) = Ae^{-\lambda|x-i\omega t}$, em que A , λ e ω são constantes reais positivas.

9.1. Normalize a função de onda $\psi(x, t)$.

9.2. Determine os valores médios de x e de x^2 .

10. Uma partícula é representada em $t = 0$ pela seguinte função de onda

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & \text{se } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{se } x < -a \text{ ou } x > a \end{cases} . \quad (4)$$

10.1. Determine a constante de normalização A .

10.2. Calcule o valor médio de x e de x^2 e a incerteza em x , σ_x , no instante $t = 0$.

11. Relação entre os problemas tri- e unidimensionais.

Demonstre que o pacote de onda livre [$V(\vec{r}) = 0$], cuja função de onda é descrita pela expressão

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\vec{k}) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}-w(\vec{k})t]} d^3k, \quad (5)$$

pode ser expresso do seguinte modo:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(x, t) \times \psi_2(y, t) \times \psi_3(z, t). \quad (6)$$

[Considere que a função $g(\vec{k})$ tem a forma de $g(\vec{k}) = g_1(k_x)g_2(k_y)g_3(k_z)$ (*vide CT, Compl. F_{1.1}, pág. 57*)

12. Pacote de onda gaussiana.

Considere uma partícula livre, num modelo unidimensional gaussiano, cuja função de onda é dada por

$$\psi(x, t) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2} e^{i[kx-w(k)t]} dk, \quad (7)$$

com $w(k) = \hbar k^2/2m$ (que é a relação de dispersão para uma partícula livre).
(*vide CT, Compl. G_{1.3}, págs. 63–65*)

12.1. Determine a expressão explícita da função de onda (7).

12.2. Verifique que a norma do pacote de onda, $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx$, é independente da evolução temporal.

12.3. Utilizando as propriedades das expressões obtidas nas alíneas anteriores, faça uma análise da variação temporal da espessura deste pacote de onda gaussiano e confirme o fenômeno do espalhamento da função de onda.