Mecânica Quântica: 2014-2015

2ª Série

1. Resolva a equação de Schrödinger para um poço potencial com lados infinitos e com uma espessura de $2a$, dado por:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x| \leq a \\ \infty, & \text{se} \quad |x| > a \end{cases} . \tag{1}$$

(*vide* **Rae, págs. 20-22**)

2. Um electrão está confinado num poço potencial unidimensional de lados infinitos, com uma espessura de $6 \times 10^{-10}\, m$. Determine:

2.1. Os três valores mais baixos permitidos da energia do electrão.

2.2. O comprimento de onda da onda electromagnética que excita o electrão do seu nível fundamental para o valor mais elevado desses três valores.
(*vide* **Rae, ex. 2.1**)

3. Se u_m e u_n são as funções de onda correspondentes a dois estados de energia de uma partícula confinada num poço potencial com lados infinitos, demonstre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_m\, u_n\, dx = 0\,, \qquad \text{se} \qquad n \neq m\,. \tag{2}$$

(*vide* **Rae, ex. 2.2**)

4. Considere uma partícula de massa m, sujeita a um potencial unidimensional $V(x)$, dado por

$$V = +\infty, \quad x < 0\,; \qquad V = 0, \quad 0 \leq x \leq a\,; \qquad V = V_0, \quad x > a\,. \tag{3}$$

Demonstre que os estados ligados ($E < V_0$) deste sistema existem apenas se $k \cot ka = -\kappa$, em que $k^2 = 2mE/\hbar^2$ e $\kappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$.
(*vide* **Rae, ex. 2.3**)

5. Demonstre que se $V_0 = 9\hbar^2/2ma^2$, apenas existe um estado ligado do sistema descrito no exercicio 4. Calcule a sua energia em termos de V_0, utilizando um método de iteração.
(*vide* **Rae, ex. 2.4**)

6. Considere uma partícula de massa m, sujeita a um potencial unidimensional $V(x)$, dado por

$$V = \infty\,, \quad \text{se} \quad x < 0 \;\; \text{ou} \;\; x > a\,; \qquad\qquad V = 0, \quad \text{se} \quad 0 \le x \le a\,. \tag{4}$$

A sua função de onda, em $t = 0$, é dada por

$$\psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\, \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\, \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] \tag{5}$$

6.1. Determine a função de onda $\psi(x, t)$ num instante arbitrário.

6.2. Calcule o valor médio da energia do sistema em $t = 0$ e num instante arbitrário.

6.3. Calcule a probablidade de, num instante arbitrário, detetar a partícula na metade da caixa, ou seja, na região $0 \le x \le a/2$.

7. Resolva a equação de Schrödinger para um poço potencial finito, descrito por

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & \text{se} \quad |x| \le a \\ 0, & \text{se} \quad |x| > a \end{cases}\,, \tag{6}$$

em que $V_0 > 0$. Considere apenas os estados ligados ($E < 0$).

8. Considere uma barreira de potencial, dada por

$$V = 0\,, \quad x < 0\,; \qquad V = V_0 > 0, \quad 0 \le x \le l\,; \qquad V = 0, \quad x > l\,. \tag{7}$$

no regime $E < V_0$.

8.1. Calcule o coeficiente de transmissao T.

8.2. Trace a figura de $T(x)$, em que $x = V_0 - E$. Discuta a sua dependência em l, a largura da barreira, considerando x fixo.
(*vide* **CT, Compl.** H_I**, pág. 73**)

9. Considere o seguinte potencial

$$V = 0\,, \quad x < 0\,; \qquad V = V_0 > 0, \quad x \ge 0\,. \tag{8}$$

9.1. Calcule os coeficientes de reflexão e de transmissão para partículas incidentes, pela esquerda, com energia de $E > V$. Discuta os resultados para o caso de $E \gg V_0$.

9.2. Para o caso de $E < V_0$, prove que a partícula sofre uma reflexão total, tal como na mecância clássica.
(*vide* **CT, Compl.** $H_I.2$**, pág. 69**)

10. Considere uma dispersão de partículas, com energia $E > 0$, num potencial unidimensional de função delta. Sem perda de generalidade significativa, considere que as partículas incidem pela esquerda do potencial.

10.1. Aplicando as condições de continuidade apropriadas em $x = 0$, determine a função de onda $\psi_E(x)$, e escreva-a na seguinte forma:

$$\psi_E(x) = e^{ikx} + F e^{ik|x|} \,. \tag{9}$$

com $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

10.2. Calcule a probablidade da densidade de corrente e demonstre que é contínua para qualquer valor.

10.3. Considere o caso específico de um acoplamento atrativo, $g < 0$, e resolva o problema do estado ligado para $E < 0$. Determine a respetiva função de onda e calcule o valor da energia do estado ligado.

10.4. Demonstre que a energia do único estado ligado corresponde a um polo do coeficiente F, que foi previamente calculado na alínea 10.1.

11. Considere um potencial, com uma contribuição de uma função delta, dado por

$$V(x) = -V_0\, \delta(x) \,, \qquad V_0 > 0 \,, \qquad x \in \mathbf{R} \,. \tag{10}$$

Suponha que a função de onda correspondente seja suave.

11.1. Determine os estados ligados ($E < 0$) que se encontram localizados neste potencial.

11.2. Considere a dispersão de uma onda plana incidente neste potencial e determine o *coeficiente de reflexão* dado por

$$R = \left. \frac{|\psi_{\text{ref}}|^2}{|\psi_{\text{in}}|^2} \right|_{x=0} \tag{11}$$

em que ψ_{ref} e ψ_{in} são as funções de onda refletidas e incidentes, respetivamente.

12. Considere um potencial unidimensional, que contém uma componente com uma "função step" e outra contribuição de uma função de delta, dado por (vide fig. 1)

$$V(x) = V\, \Theta(x) - \frac{\hbar^2 g}{2m}\, \delta(x) \,. \tag{12}$$

12.1. Calcule o coeficiente de reflexão para partículas incidentes, pela esquerda, com energia de $E > V$.

12.2. Considere o caso $E < 0$. Determine os valores próprios e funções próprias para quaisquer soluções de estados ligados.

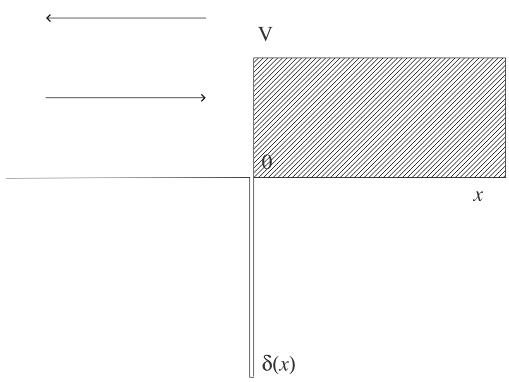

Figura 1: Potencial com uma "step function", e uma contribuição de uma função de delta atrativa.