

Mecânica Quântica

7ª Série

1. Considere as matrizes de Pauli, dadas por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1. Demonstre que estas matrizes são Hermíticas. Determine os seus valores próprios e os vetores próprios (exprimindo a expansão normalizada na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$).

1.2. Prove as seguintes relações:

- $\det(\sigma_j) = -1$ com $(j = x, y, z)$;
- $\text{Tr}(\sigma_j) = 0$;
- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$, em que I é a matriz de unidade 2×2 ;
- $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$;
- $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$.

2. Considere uma partícula de spin $1/2$ e com um momento magnético $\mathbf{M} = \gamma\mathbf{S}$. O espaço de estados de spin é dado pela base dos vetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$, que são vetores próprios de S_z , com os valores próprios $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, respetivamente. No instante $t = 0$, o estado do sistema é dado por:

$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle. \quad (1)$$

2.1. Se o observável S_x é medido no instante $t = 0$, quais são os resultados possíveis e as probabilidades respetivas?

2.2. Em vez de efectuar a medição da alínea anterior, permita que o sistema evolua sob a influência de um campo magnético paralelo a Oy , de módulo B_0 . Calcule, na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, o estado do sistema no instante t .

2.3. Neste instante t , medimos os observáveis S_x, S_y e S_z . Quais são os valores possíveis e as probabilidades respetivas? Qual é a relação existente entre B_0 e t , de modo que o resultado de uma das medições seja certa?

3. Considere uma partícula de spin $1/2$, utilizando a notação da questão anterior.

3.1. No instante $t = 0$, efectua-se uma medição de S_y , e obtém-se o resultado $+\hbar/2$. Qual é o vetor $|\psi(0)\rangle$ imediatamente após a medição?

3.2. Imediatamente após esta medição, aplica-se um campo magnético uniforme e dependente do tempo, paralelo a Oz . O operador Hamiltoniano do spin, i.e., $H(t)$, é dado por

$$H(t) = \omega_0(t) S_z. \quad (2)$$

Assuma que $\omega_0(t)$ é nulo, para $t < 0$ e para $t > T$, e que aumenta linearmente de 0 para ω_0 no intervalo $0 \leq t \leq T$ (Note que T é um parâmetro, com dimensões de um tempo). Demonstre que, no instante t , o vetor de estado é dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\theta(t)} |+\rangle + i e^{-i\theta(t)} |-\rangle \right]. \quad (3)$$

Determine a função $\theta(t)$.

3.3. No instante $t = \tau > T$, faz-se uma medição de S_y . Quais são os resultados possíveis, e as probabilidades respectivas? Determine a relação existente entre ω_0 e T , de modo a obter um resultado certo.

4. Considere uma partícula de spin $1/2$, colocada num campo magnético \mathbf{B}_0 , com as seguintes componentes

$$B_x = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0, \quad B_y = 0, \quad B_z = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0. \quad (4)$$

Utilize a mesma notação do exercício 1.

4.1. Determine a matriz que representa, na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, o operador H , o Hamiltoniano do sistema.

4.2. Calcule os valores próprios e os vetores próprios de H .

4.3. Considere que o sistema no instante $t = 0$ encontra-se no estado $|-\rangle$. Quais os valores da energia, e as probabilidades respectivas?

4.4. Determine o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ no instante t . Neste instante, efectua-se uma medição de S_x . Qual o valor médio dos resultados obtidos?

5. Considere uma partícula de spin $1/2$, com um momento magnético $\mathbf{M} = \gamma \mathbf{S}$, colocada num campo magnético \mathbf{B}_0 . Este último tem as seguintes componentes: $B_x = -\omega_x/\gamma$, $B_y = -\omega_y/\gamma$ e $B_z = -\omega_z/\gamma$, tais que $\omega_0 = -\gamma|\mathbf{B}_0|$.

5.1. Demonstre que o operador de evolução desta partícula é dada por $U(t, 0) = e^{-iMt}$, em que M é o operador

$$M = \frac{1}{\hbar} [\omega_x S_x + \omega_y S_y + \omega_z S_z] = \frac{1}{2} [\omega_x \sigma_x + \omega_y \sigma_y + \omega_z \sigma_z], \quad (5)$$

e em que σ_x , σ_y e σ_z são as matrizes de Pauli.

Determine M na forma matricial, na base $\{| + \rangle, | - \rangle\}$, ou seja, os vetores próprios de S_z . Demonstre a seguinte relação:

$$M^2 = \frac{1}{4} [\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2] = \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2. \quad (6)$$

5.2. Prove que o operador de evolução pode ser escrito da seguinte forma:

$$U(t, 0) = \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - \frac{2i}{\omega_0} M \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right). \quad (7)$$

5.3. Considere um spin, que no instante $t = 0$, se encontra no estado $|\psi(0)\rangle = | + \rangle$. Demonstre que a probabilidade de o encontrar no estado $| + \rangle$, no instante t , é:

$$\mathcal{P}_{++}(t) = |\langle + | U(t, 0) | + \rangle|^2, \quad (8)$$

e derive a relação

$$\mathcal{P}_{++}(t) = 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right). \quad (9)$$

6. Considere um sistema composto por dois spins de $1/2$, \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 , e a base de quatro vetores $|\pm \pm\rangle$. O sistema, no instante $t = 0$, encontra-se no estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|++\rangle + \frac{1}{2}|+-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|--\rangle. \quad (10)$$

6.1. No instante $t = 0$, efetua-se uma medição de S_{1z} . Qual a probabilidade de encontrar o valor $-\hbar/2$? Qual o vetor de estado após esta medição? De seguida, se medirmos S_{1x} , quais os resultados possíveis e as probabilidades respetivas? Responda às mesmas questões para uma medição inicial de S_{1z} , em que o resultado seja $+\hbar/2$.

6.2. Considere que o sistema se encontra no estado $|\psi(0)\rangle$, descrito pela Eq. (10). Efetuam-se medições simultâneas de S_{1z} e S_{2z} . Qual a probabilidade de encontrar resultados opostos? E resultados idênticos?

6.3. Em vez de efetuar as medições da questão anterior, deixemos que o sistema evolua sob a influência do Hamiltoniano:

$$H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}. \quad (11)$$

Qual é o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$, no instante t ?

7. Considere as seguintes matrizes, correspondentes ao momento angular de uma partícula de spin 1:

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.1. Demonstre que as matrizes acima indicadas obedecem às regras de comutação apropriadas e que têm os valores próprios correspondentes às três componentes do momento angular de uma partícula de spin 1:

7.2. Obtenha os vetores próprios das matrizes acima representadas. De seguida, determine as probabilidades dos possíveis resultados de uma medição de L_x , supondo que a partícula de spin 1 se encontra, inicialmente, num estado próprio de L_z , com valor próprio \hbar .

8. Analise a separação espectral do estado $l = 2$ de um átomo, com um único electrão, devida aos seguintes efeitos: (i) acoplamento spin-órbita; (ii) efeito de Zeeman com um campo forte; (iii) efeito de Zeeman com um campo fraco.