ELEMENTOS DE FÍSICA
LICENCIATURA EM GEOLOGIA

1ª Série de Problemas - Operações sobre vectores

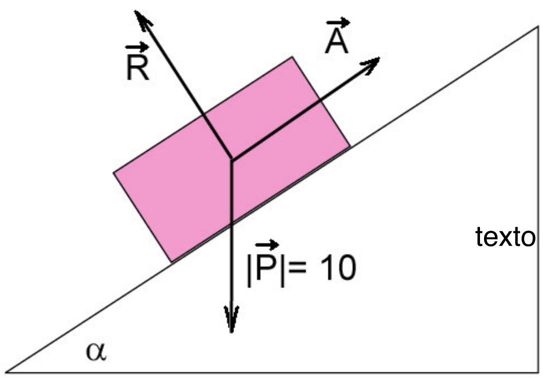
***NOTA**: Os problemas assinalados com o símbolo ® têm a sua resolução na pasta da disciplina*

1 ®. O vector $\vec{A}$ tem magnitude 100 e orientação N20E. O vector $\vec{B}$ tem magnitude 50 e orientação N135W.

a) Determine as componentes de cada um dos vectores segundo as direcções X (oeste-este) e Y (sul-norte);

b) Determine as componentes do vector soma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$;

c) Calcule o comprimento e a orientação do vector soma.



2. Considere os vectores representados na figura ao lado (α =30º). Determine os comprimentos dos vectores $\vec{R}$ e $\vec{A}$ de modo a que a soma dos 3 vectores seja nula, $\vec{P} + \vec{R} + \vec{A} = \vec{0}$. Sugestão: faça a decomposição dos vectores segundo um sistema de eixos adequado.

3. Dados os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ cujas projecções sobre um sistema de eixos ortogonais são respectivamente,

$a_x = 5$, $a_y = 4$, $a_z = -3$

$b_x = 3$, $b_y = -4$, $b_z = 5$

determine:

a) $6\,\vec{a} - 3\,\vec{b}$

b) $a^2 + b^2$

c) O ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$

4 - Considere as coordenadas aproximadas de Lisboa (39ºN, 9ºW) e Adelaide (35ºS, 138ºE). Use para o raio da Terra o valor $R_T = 6400\ km$

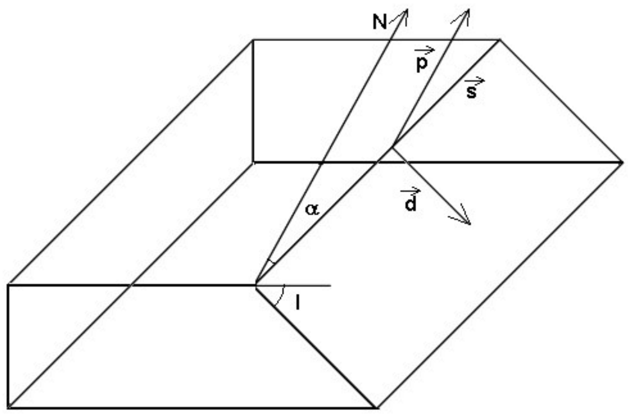
a) Determine as coordenadas cartesianas de cada uma das cidades.

b) Calcule a distância, em linha recta, entre as duas cidades.

c) Calcule a distância angular entre as duas cidades (ângulo entre ambos os vectores posição).

d) Calcule a distância, medida à superfície do Globo, entre as duas cidades.

5 ®. A estria de uma falha tem a direcção N30ºE e está inclinada 20º em relação à horizontal. Determine as componentes do vector unitário definido pela estria segundo um sistema de eixos em que $X \equiv E$, $Y \equiv N$ e Z é a direcção vertical, positiva para cima.



6 ®. Considere o plano de falha definido na figura ao lado. A sua orientação (azimute) é medida pelo ângulo que a intersecção com a horizontal faz com o Norte (vector $\vec{s}$ na figura). A inclinação do plano (I na figura) é também a inclinação da linha de maior declive do plano (vector $\vec{d}$ na figura). O pólo do plano é definido pela direcção do vector perpendicular ao plano ($\vec{p}$ na figura). Sabendo que o plano tem uma orientação N60ºE e inclina 30º para SE, determine as componentes cartesianas dos 3 vectores (unitários) definidos na figura, $\vec{s}$, $\vec{d}$, $\vec{p}$. Use o mesmo sistema de eixos do problema anterior.

7. Dados os vectores $\vec{\omega} = 3\,\vec{u}_x + 4\,\vec{u}_y - 5\,\vec{u}_z$ e $\vec{r} = -\,\vec{u}_x + \vec{u}_y + 2\,\vec{u}_z$ calcule as componentes do vector $\vec{v} = \vec{\omega} x \vec{r}$

8. Considere o vector $\vec{r} = R(\cos\omega t\,\vec{u}_x + \text{sen}\,\omega\, t\,\vec{u}_y)$ variável com o tempo t e onde R e ω são constantes.

a) Verifique que $\vec{r}(t) = \vec{r}(t+T)$ em que $T = 2\pi/\omega$, isto é, $\vec{r}$ é uma função periódica de período T (repete o seu valor ao fim do tempo T).

b) Verifique que o módulo de $\vec{r}$ é constante, isto é, não depende de t.

c) Obtenha a expressão do vector $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Verifique que as direcções dos vectores $\vec{r}$ e $\frac{d\vec{r}}{dt}$ são perpendiculares.

9. Considere o vector $\vec{r} = (t^2 + t)\,\vec{u}_x + (3t - 2)\,\vec{u}_y + (2\,t^3 - 4\,t^2)\,\vec{u}_z$. Determine as componentes dos vectores $\vec{r}$ e $\frac{d\vec{r}}{dt}$ para $t = 2$.

FORMULÁRIO - Operações sobre vectores

Dados os vectores $\vec{a} = a_x\,\hat{u}_x + a_y\,\hat{u}_y + a_z\,\hat{u}_z$ e $\vec{b} = (\,b_x\,,\,b_y\,,\,b_z\,)$ tem-se:

comprimento $|\,\vec{a}\,| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

produto por um escalar k $\quad k\,\vec{a} = (\,k\,a_x\,,\,k\,a_y\,,\,k\,a_z\,)$

versor $\quad \hat{u}_a = \dfrac{\vec{a}}{a} = \left(\dfrac{a_x}{a}\,,\,\dfrac{a_y}{a}\,,\,\dfrac{a_z}{a}\right)$

soma e diferença $\quad \vec{a}\ \pm\vec{b} = (\,a_x \pm b_x\,,\,a_y \pm b_y\,,\,a_z \pm b_z\,)$

distância $\quad \Delta(\vec{a},\vec{b}) = |\,\vec{b}\,\text{-}\,\vec{a}\,|$

produto interno $\quad \vec{a} \bullet \vec{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z = |\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,|\cos\theta$

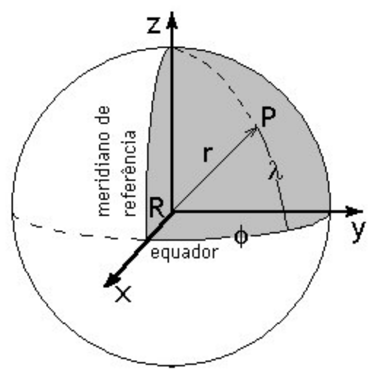
ângulo entre vectores $\quad \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|}$

produto externo:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{u}_x\,(a_y b_z - a_z b_y) - \hat{u}_y\,(a_x b_z - a_z b_x) + \hat{u}_z\,(a_x b_y - a_y b_x)$$

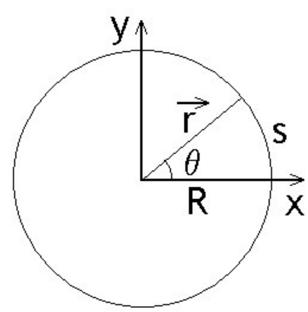
$|\,\vec{a}\times\vec{b}\,| = |\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\,\mathrm{sen}\,\theta$

Coordenadas esféricas $(R\,,\lambda\,,\varphi)$ e transformação em coordenadas cartesianas (r_x, r_y, r_z):



$$\begin{cases} r_x = R\cos\lambda\cos\varphi \\ r_y = R\cos\lambda\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ r_z = R\,\mathrm{sen}\,\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \\ \lambda = \mathrm{sen}^{-1}\dfrac{r_z}{R} \\ \varphi = \tan^{-1}\dfrac{r_y}{r_x} \end{cases}$$

Coordenadas polares $(R\,,\theta)$ e transformação em coordenadas cartesianas $(x\,,\,y)$



$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Comprimento do arco

$s = R\,\theta$

Derivação

$$\vec{a} = \vec{a}(t) : \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{da_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{da_z}{dt}\hat{u}_z$$